

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. IX, N. 6

Serie nona

1 Giugno 1952

Sull'energia di legame dell' H^3 e dell' He^4 .

G. MORPURGO

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 29 Marzo 1952)

Riassunto. — Si applica al calcolo dell'energia dello stato fondamentale dell' H^3 e dell' He^4 un metodo assai più rapido e preciso dei precedenti. Esso è basato sull'idea di trovare il minimo del valor medio dell'Hamiltoniano, non tra una classe di funzioni contenenti un certo numero di parametri, ma tra l'intera classe delle funzioni di un determinato argomento (che viene assunto essere la somma dei quadrati delle distanze tra i nucleoni). I risultati e le conclusioni sono esposti nel n. 5.

La presente nota è un contributo al problema dell'energia di legame dell' H^3 e dell' He^4 ; in essa viene descritto un nuovo metodo di calcolo dell'energia di legame di tali nuclei, metodo che presenta sopra i precedenti vari vantaggi.

Il metodo in questione può essere senz'altro applicato al caso in cui le forze agenti tra due nucleoni siano non centrali; tuttavia per semplicità in questo primo lavoro considereremo soltanto forze centrali: non c'è bisogno di insistere sul fatto che le forze tra due nucleoni contengono in effetti una grossa percentuale di forze non centrali le quali contribuiscono, per lo meno nella forma attuale, considerevolmente ai valori dell'energia di legame ⁽¹⁾. I calcoli che presentiamo hanno perciò più che altro lo scopo di illustrare gli accennati vantaggi del metodo.

⁽¹⁾ E. GERJOUY e J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **61**, 138 (1942); TSI-MING HSU e H. S. W. MASSEY: *Proc. Roy. Soc. (A)* **196**, 135 (1949); R. E. CLAPP: *Phys. Rev.*, **76**, 873 (1949); TSI-MING HSU e KUNG-NGOU HSU: *Phys. Rev.*, **78**, 633 (1950).

Fissando l'attenzione sulla espressione della energia potenziale tra due nucleoni:

$$(1) \quad J(r_{ik}) = -Af\left(\frac{r_{ik}}{a}\right) \{w + bP_{\sigma} + hP_x P_{\sigma} + mP_x\},$$

assumeremo per f una gaussiana:

$$\exp[-r_{ik}^2/a^2].$$

Il metodo può tuttavia essere *egualmente bene* applicato ad un potenziale yukawiano od esponenziale. E fisseremo l'attenzione sulla seguente scelta dei parametri:

$$(2) \quad \begin{cases} A = 35,6 \text{ MeV} & a = 2,25 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ g = b + h = 0,194 & (m + w + b + h = 1). \end{cases}$$

La ora detta scelta della forma dell'energia potenziale e dei parametri è stata fatta per poter paragonare i nostri risultati con quelli di vari altri autori ⁽²⁾.

Nel n. 1 accenneremo ai risultati dei vari lavori finora pubblicati con la scelta (2) dei parametri; nel n. 2 esporremo il metodo per l'H³; nel n. 3 per la particella α ; nel n. 4 raffineremo il calcolo dell'H³ e infine nel n. 5 discuteremo i risultati ottenuti.

1. - Situazione del problema.

La situazione del problema è illustrata dalla tabella seguente: nella prima colonna di essa si è riportato il procedimento di calcolo usato, nella seconda la funzione d'onda di prima approssimazione usata, nella terza il numero delle approssimazioni successive (il termine « approssimazioni successive » avendo naturalmente significato diverso in un metodo variazionale, variazionale perturbativo, iterativo, ecc.), nella quarta il risultato globale ottenuto prescindendo dall'energia coulombiana, come faremo in tutto il seguito.

⁽²⁾ H. MARGENAU e D. T. WARREN: *Phys. Rev.*, **52**, 790, 1027 (1937); H. MARGENAU e W. A. TYRRELL (JR.): *Phys. Rev.*, **54**, 422 (1938); N. SVARTHOLM: *The binding energies of the lightest atomic nuclei* (Lund, 1945).

	Metodo usato	Funzione d'onda di ap- prossimazione zero	Numero approssi- mazioni successive	Risultato globale — <i>E</i> MeV	Ref. bibliografica e annotazioni
H ³	variazionale	gaussiana	13	7,21	MARGENAU e WARREN ⁽²⁾
	iterativo	gaussiana	2	7,3	SVARTHOLM ⁽²⁾
	presente lavoro	—	2	7,79	(senza il raffinamento di cui al n. 4 si ha — 7,24 MeV)
He ⁴	variazionale (coordinate individuali)	gaussiana	14	26,67	MARGENAU e WARREN ⁽²⁾
	variazionale (coordinate relative)	gaussiana	11	26,76	MARGENAU e TYRRELL ⁽²⁾
	iterativo	gaussiana	2	~27,1	SVARTHOLM ⁽²⁾
	presente lavoro	—	1	26,77	—

Nell'ultima riga della tabella si trovano i risultati del nostro lavoro.

2. — Impostazione del metodo e applicazione all'H³.

Il metodo che useremo si ritrova già in un vecchio lavoro di HYLLEAAS ⁽³⁾ sull'atomo di He. Con tale metodo HYLLEAAS giustificava il fatto che una buona approssimazione ad una corretta funzione d'onda per lo stato fondamentale del parHe si poteva già ottenere con una funzione del tipo:

$$\exp \left[-\frac{Z'}{a_0} (r_1 + r_2) \right],$$

rappresentante gli elettroni muoventisi in un campo coulombiano schermato.

Noi abbiamo semplicemente applicato tale metodo ai problemi nucleari come ora più in dettaglio passiamo a vedere.

Fisseremo l'attenzione su una funzione d'onda del tritone antisimmetrica

⁽³⁾ E. A. HYLLEAAS: *Zeits. f. Phys.*, **54**, 347 (1929); **48**, 469(1928).

di spin rispetto allo scambio dei due neutroni e completamente simmetrica spazialmente rispetto allo scambio dei tre nucleoni; ossia scriveremo la Φ dello stato fondamentale dell' H^3 sotto la forma:

$$(3) \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3),$$

dove α_1 indica la funzione di spin del protone, $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ quelle dei neutroni, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ le coordinate dei tre nucleoni e la φ è simmetrica rispetto a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ e normalizzata. È noto come una funzione d'onda della forma (3) avrebbe la simmetria corretta rispetto a permutazioni se non vi fossero nella energia potenziale i termini di Bartlett e di Heisenberg (prima approssimazione di Wigner). In effetti con la presenza di tali termini, la funzione d'onda corretta dello stato fondamentale viene ad essere una combinazione lineare di due funzioni, una delle quali ha una parte spaziale simmetrica rispetto allo scambio di \mathbf{x}_2 con \mathbf{x}_3 , mentre l'altra ha la parte spaziale antisimmetrica. Nell'usare perciò come funzione variazionale una funzione del tipo (3) commettiamo certamente un lieve errore; tale errore è però notoriamente del tutto trascurabile e non ce ne occuperemo più, essendo già stato valutato da vari autori (4).

Introducendo allora coordinate normali relative e baricentrici $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{X}$ legate alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ da:

$$(4) \quad \mathbf{q} = \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{2}, \quad \mathbf{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3), \quad \mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3),$$

e, sottraendo l'energia del baricentro, il valor medio dell'energia dell' H^3 nello stato (3) si scrive:

$$\overline{H} = \int \varphi^* \left(-\frac{3\hbar^2}{4M} (\Delta_q^2 + \Delta_r^2) - B \sum_{\text{neutroni}} \exp \left[-\frac{r_{ik}^2}{a^2} \right] - C \exp \left[-\frac{r_{23}^2}{a^2} \right] \right) \varphi \, d\tau_q d\tau_r,$$

dove φ e r_{ik}, r_{23} si intendono ora espressi mediante le \mathbf{r}, \mathbf{q} e si è posto:

$$(5) \quad B = \left(1 - \frac{1}{2}g \right) A, \quad C = (1 - 2g)A.$$

In uno stato S come quello con cui abbiamo a che fare la funzione d'onda φ del sistema dipenderà semplicemente dalla configurazione del triangolo costituito dai nucleoni, configurazione che può essere caratterizzata dal modulo r di \mathbf{r} , dal modulo q di \mathbf{q} e dall'angolo ψ tra \mathbf{r} e \mathbf{q} .

(4) W. RARITA e R. PRESENT: *Phys. Rev.*, **51**, 788 (1937); H. MARGENAU e W. TYRRELL: *Ref. (2)*.

Posto

$$B^* = \frac{4M}{3\hbar^2} B, \quad C^* = \frac{4M}{3\hbar^2} C, \quad E^* = \frac{4M}{3\hbar^2} E,$$

il minimo valore di E^* è, per uno stato S , dato dal principio variazionale:

$$(6) \quad \delta \int_0^\infty dr \int_0^\infty dq \int_0^\pi d\psi \left\{ \sin \psi q^2 r^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^2 \right] + (r^2 + q^2) \sin \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right)^2 - \right. \\ \left. - \sin \psi q^2 r^2 \left(B^* \sum_{2k}^3 \exp \left[-\frac{r_{1k}^2}{a^2} \right] + C^* \exp \left[-\frac{r_{23}^2}{a^2} \right] \right) \right\} \varphi^2 = 0,$$

con la condizione

$$(7) \quad \int_0^\infty dr \int_0^\infty dq \int_0^\pi \sin \psi d\psi r^2 q^2 \varphi^2 = 1.$$

È a questo punto che il nostro procedimento si distacca da quelli convenzionali per riattaccarsi all'idea usata da HYLLERAAS per l'atomo d'He.

Noi cercheremo precisamente una funzione variazionale che soddisfi alla (6) (7) tra la classe delle funzioni del solo argomento completamente simmetrico $\varrho^2 = r^2 + q^2$.

Si vede immediatamente che è:

$$(8) \quad r^2 + q^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_3) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3),$$

e l'espressione a secondo membro della (8) non è altro che la metà della somma dei quadrati costruiti sui lati del triangolo costituito dai tre nucleoni. Introducendo coordinate ϱ, θ :

$$(9) \quad r = \varrho \cos \theta, \quad q = \varrho \sin \theta,$$

il principio variazionale (6) (7) si scrive allora:

$$(10) \quad \delta \int_0^\infty d\varrho \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot 2\varrho^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cdot \\ \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)^2 - (2B^* + C^*) \exp \left[-\frac{4}{3} \varrho^2 \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \right] \varphi^2 \right\} = 0,$$

(avendo già compiuto l'integrazione rispetto a ψ tra 0 e π) con la condizione

$$(11) \quad 2 \int_0^\infty d\varrho \int_0^{\pi/2} d\theta \varrho^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \varphi^2 = 1.$$

Nelle (10) (11) la φ è intesa ora come funzione della sola ϱ ; la notevole semplificazione rispetto alla (6) è dovuta al fatto che la φ è simmetrica, ciò che consente di scrivere nell'energia potenziale con simboli evidenti:

$$(12) \quad \int (12) \varphi^2 = \int (13) \varphi^2 = \int (23) \varphi^2.$$

Gli integrali rispetto a θ nelle (10) (11) possono essere fatti e l'equazione tipo Schrödinger per la $\varphi(\varrho)$, equivalente al principio variazionale in una sola variabile al quale le (10) (11) danno luogo quando si compiano le dette integrazioni, viene ad essere:

$$(13) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\varrho^2} + \frac{5}{\varrho} \frac{d\varphi}{d\varrho} + (2B + C) \frac{4M}{\hbar^2} \frac{a^2}{\varrho^2} \exp\left[-\frac{\varrho^2}{a^2}\right] \left\{ -iJ_1\left(i\frac{\varrho^2}{a^2}\right) \right\} \varphi + \frac{2M}{\hbar^2} E \varphi = 0,$$

con la condizione che

$$(14) \quad \int_0^\infty \varrho^5 \varphi^2 d\varrho,$$

sia finito il ϱ che compare nelle (13) (14) è pari a $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ volte il ϱ che compare nella (10)).

La determinazione del più basso autovalore della (13) fornisce dunque per quanto abbiamo detto, il migliore valore dell'energia di legame dell' H^3 che si può ottenere con una funzione della sola ϱ . Nella (13) J_1 è la funzione di Bessel di ordine 1, quale definita ad esempio in (5).

Posto

$$(14) \quad \varrho^{5/2} \varphi(\varrho) = F(\varphi),$$

e introducendo la variabile adimensionale:

$$(15) \quad x = \frac{\varrho}{a},$$

posto inoltre:

$$(16) \quad \varepsilon = \frac{2Ma^2}{\hbar^2} E,$$

la (13) si scrive

$$(17) \quad F'' + \left[(2B + C) \frac{4Ma^2}{\hbar^2} \frac{\exp[-x^2]}{x^2} \{ -iJ_1(ix^2) \} - \frac{15}{4x^2} \right] F + \varepsilon F = 0.$$

(5) W. MAGNUS e F. OBERHETTINGER: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik* (Springer Verlag, 1948).

Il grafico di quella che possiamo chiamare l'energia potenziale efficace per l'H³:

$$(18) \quad V(x) = \frac{15}{4x^2} - (2B + C) \frac{4Ma^2}{\hbar^2} \frac{\exp[-x^2]}{x^2} \{-iJ_1(ix^2)\},$$

è riportato nella fig. 1 (curva continua). Si tenga presente che con i valori (2) è:

$$(19) \quad \frac{\hbar^2}{Ma^2} = 8,1 \text{ MeV}, \quad (2B + C) \frac{4Ma^2}{\hbar^2} = 42,4543.$$

La salita della curva nell'origine è da mettersi ovviamente in relazione con il principio di indeterminazione.

Risulta dalla figura come $V(x)$ abbia la forma di una energia potenziale

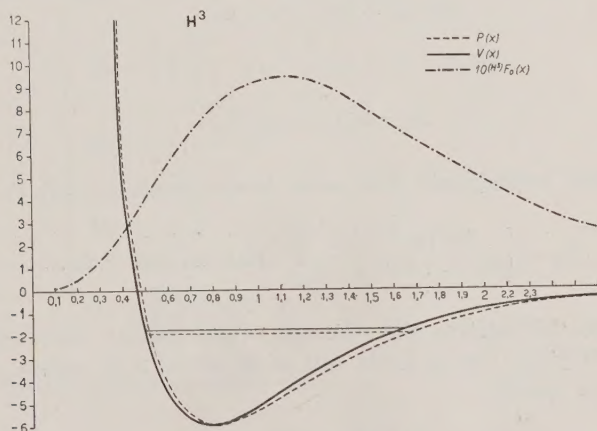


Fig. 1.

per molecole. È facile vedere che essa può essere assai bene approssimata da una energia potenziale alla Pöschl-Teller introdotta ⁽⁶⁾ da questi Autori per studiare le vibrazioni delle molecole biatomiche. Tale energia potenziale, i cui autovalori sono ottenibili esattamente, ha la forma generale

$$(20) \quad P_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha}(x) = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\mathcal{A}}{\sinh^2 \alpha x} - \frac{\mathcal{B}}{\cosh^2 \alpha x} \right],$$

in cui \mathcal{A} , \mathcal{B} , α sono tre parametri arbitrariamente fissabili.

⁽⁶⁾ G. PÖSCHL e E. TELLER: *Zeits. f. Phys.*, **83**, 143 (1933); vedasi anche: L. INFELD e T. E. HULL: *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 34 (1951).

Scegliendo:

$$(21) \quad \mathcal{A} = \frac{15}{4}, \quad \mathcal{B} = 19, \quad \alpha = 1,$$

si ottiene la curva tratteggiata in fig. 1; come si vede tale curva approssima assai bene la $V(x)$ ed anche nell'origine la differenza tra (18) e (20) è finita (ed assai piccola = 2,27 MeV).

Gli autovalori $\varepsilon_n^{(P)}$ del potenziale di Pöschl-Teller, posto:

$$(22) \quad \begin{cases} \mu(\mu + 1) = \mathcal{B}, \\ \nu(\nu - 1) = \mathcal{A}, \end{cases} \quad \begin{matrix} \mu > 0 \\ \nu > 0 \end{matrix}$$

sono

$$(23) \quad \varepsilon_n^{(P)} = -\alpha^2(\mu - \nu - 2n)^2,$$

con:

$$(24) \quad n = 0, 1, 2 \dots < \frac{\mu - \nu}{2},$$

e l'autofunzione normalizzata dello stato fondamentale ($n = 0$) è:

$$(25) \quad \psi_0 = \left[\frac{2\alpha\Gamma(\mu + 1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2)\Gamma(\mu - \nu)} \right]^{1/2} \sinh^\nu \alpha x \cosh^{-\mu} \alpha x.$$

L'autofunzione (25) relativa alla scelta (21) delle costanti verrà indicata nel seguito con $^{(H^3)}\mathcal{F}_0(x)$. Con la scelta (21) di \mathcal{A} , \mathcal{B} ed α , si ottiene $\nu = 2,5000$ e $\mu = 3,8874$ e quindi:

$$(26) \quad {}^{(H^3)}E_0^{(P)} \equiv \frac{\hbar^2}{Ma^2} {}^{(H^3)}\varepsilon_0^{(P)} = -7,79 \text{ MeV}.$$

L'autovalore vero ε della (17) (che d'ora in avanti affiggeremo di un indice $^{(H^3)}$) si può ottenere con ottima approssimazione (e in ogni caso con approssimazione sicuramente per eccesso), considerando la differenza tra $V(x)$ e $P(x)$ come perturbazione; l'integrale:

$$(27) \quad \int_0^\infty ({}^{(H^3)}\mathcal{F}_0(x))^2 \{V(x) - P_{15/4, 19, 1}(x)\} dx,$$

è stato eseguito numericamente e vale: + 0,136 di modo che è certamente

$$(28) \quad {}^{(H^3)}E \equiv \frac{\hbar^2}{2Ma^2} {}^{(H^3)}\varepsilon < -7,79 + 4,05 \cdot 0,136 = -7,24 \text{ (MeV)}.$$

Dalla disuguaglianza (24) risulta inoltre che nell' H^3 si è lontani dall'avere stati eccitati S stabili.

3. - Applicazione alla particella α .

Lo stesso metodo usato per l' H^3 può essere trasportato alla particella α . Anche qui la parte spaziale della funzione d'onda è con ottima approssimazione completamente simmetrica. Useremo in questo caso un procedimento alquanto abbreviato, supponendo sin dal principio che la funzione d'onda spaziale dipenda soltanto dalla somma R^2 dei quadrati costruiti sui lati del tetraedro costituito dai quattro nucleoni.

Introdotte coordinate relative e baricentrali

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(-r_4 + \frac{1}{3} (r_1 + r_2 + r_3) \right), \\ Q_2 = \frac{1}{2} (r_3 - r_2), \\ Q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-r_1 + \frac{1}{2} (r_2 + r_3) \right), \\ X = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4), \end{array} \right.$$

si può controllare immediatamente che è:

$$(30) \quad \frac{1}{8} R^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2.$$

Posto ancora:

$$(31) \quad Q_{1x} = t_1 \cos \theta_1, \quad Q_{1y} = t_2 \sin \theta_1 \cos \varphi_1, \quad Q_{1z} = t_3 \sin \theta_1 \sin \varphi_1,$$

e analogamente per Q_2 e Q_3 , si ha:

$$(32) \quad R = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2};$$

limitandoci a funzioni variazionali φ della sola R conviene ancora scrivere:

$$(33) \quad t_1 = R \sin \xi \cos \eta, \quad t_2 = R \cos \xi, \quad t_3 = R \sin \xi \sin \eta,$$

(con il che $0 \leq R \leq \infty$, $0 = \xi \leq \pi/2$, $0 \leq \eta \leq \pi/2$); ed il principio variazionale

si scrive allora:

$$(34) \quad \delta \int_0^{\infty} R^8 dR \int_0^{\pi/2} \sin^5 \xi \cos^2 \xi d\xi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \eta \sin^2 \eta d\eta \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)^2 - (4\bar{B} + 2\bar{C}) \cdot \exp \left[-\frac{4R^2 \cos^2 \xi}{a^2} \right] \right\} = 0,$$

dove:

$$\bar{B} = \frac{4M}{\hbar^2} B, \quad \bar{C} = \frac{4M}{\hbar^2} C, \quad \bar{E} = \frac{4M}{\hbar^2} E,$$

con la condizione:

$$(35) \quad \int_0^{\infty} \varphi^2 R^8 dR \int_0^{\pi/2} \sin^5 \xi \cos^2 \xi d\xi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \eta \sin^2 \eta d\eta = 1.$$

Anche qui le integrazioni rispetto a ξ e η sono effettuabili e, come già nel caso dell' H^3 , si perviene ad un principio variazionale nella sola variabile R (che non stiamo a scrivere) il quale risulta facilmente essere equivalente alla seguente equazione:

$$(36) \quad \frac{d^2 \varphi}{dR^2} + \frac{8}{R} \frac{d\varphi}{dR} + \frac{4M}{\hbar^2} (4B + 2C) \mathcal{G} \left(\frac{R}{a} \right) \varphi + \frac{4M}{\hbar^2} E \varphi = 0,$$

dove:

$$\mathcal{G} \left(\frac{R}{a} \right) = \frac{105}{16k^2} \left\{ \frac{\mathcal{J}(k)}{k} \left[1 + \frac{15}{4k^4} - \frac{3}{k^2} \right] + \exp[-k^2] \left[\frac{1}{2k^2} - \frac{15}{4k^4} \right] \right\}, \quad k = \frac{2R}{a},$$

e

$$\mathcal{J}(k) = \int_0^k \exp[-V^2] dV,$$

con la condizione che $\int_0^{\infty} \varphi^2 R^8 dR$ sia finito.

Posto

$$(38) \quad \varphi R^4 = F,$$

e introdotta oltre a ciò la variabile adimensionale

$$(39) \quad x = \sqrt{2} \frac{R}{a},$$

posto ancora:

$$(40) \quad \varepsilon = \frac{2Ma^2}{\hbar^2} E,$$

si ha l'equazione:

$$(41) \quad F'' + \left[\frac{2Ma^2}{\hbar^2} (4B + 2C) \mathcal{G}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{12}{x^2} \right] F + \varepsilon F = 0,$$

con la condizione che $\int_0^{\infty} F^2 dx$ sia finito. L'energia potenziale efficace in questo caso è:

$$S(x) = \frac{12}{x^2} - \frac{2Ma^2}{\hbar^2} (4B + 2C) \mathcal{G}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

ed è rappresentata (curva continua) nella fig. 2 in funzione di x . Anche qui il potenziale di Pöschl-Teller (20) con la seguente scelta delle costanti:

$$(42) \quad \mathcal{A} = 12, \quad \mathcal{B} = 61,5, \quad \alpha = \frac{1}{1,3},$$

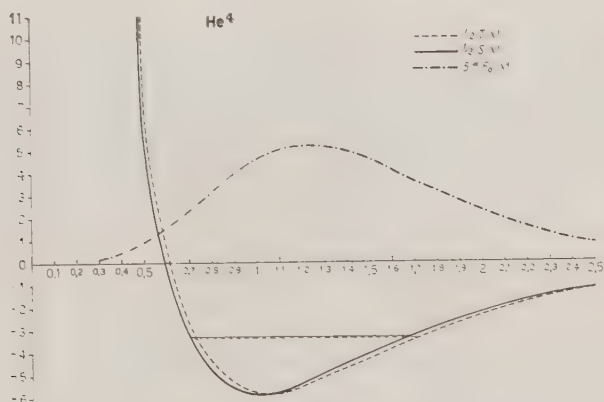


Fig. 2.

approssima bene (vedasi la curva tratteggiata in fig. 2) l'energia potenziale $S(x)$ e poichè ai valori (42) corrisponde $r = 4,000$, $u = 7,358$ risulta

$$(43) \quad {}^{(a)}E_0^{(P)} \equiv {}^{(a)}\varepsilon_0^{(P)} \frac{\hbar^2}{2Ma^2} = -27,022 \text{ MeV},$$

la funzione d'onda corrispondente è:

$$({}^{(a)}\mathcal{F}_0(x) \sim \sinh^4 \frac{x}{1,3} \cosh^{-7,358} \frac{x}{1,3},$$

L'integrale:

$$(45) \quad \int_0^\infty ({}^{(a)}\mathcal{F}_0(x))^2 \{S(x) - P_{12, 61,5, 1/1,3}(x)\} dx,$$

calcolato numericamente vale: $+ 0,105$, onde risulta:

$$(46) \quad ({}^{(a)}E < -27,022 + 0,105 \cdot \frac{4,05}{1,69} = 26,77 \text{ MeV}.$$

Contrariamente a quanto avviene per l' H^3 l'energia potenziale $S(x)$ consente qui la presenza di un livello eccitato $2S$ con energia totale negativa. Il fatto che esistesse lo stato eccitato S era già stato notato da MARGENAU e TYRRELL ⁽²⁾ i quali avevano trovato per l'energia di tale livello $-1,3 \text{ MeV}$. La (23) e la (42) danno per il livello in questione:

$$(47) \quad \frac{\hbar^2}{2Ma^2} \frac{1}{1,69} (\mu - \nu - 2)^2 = -4,41 \text{ MeV}.$$

Naturalmente questo valore non è corretto; l'energia di questo stato eccitato è in effetti maggiore del valore (47) perchè l'autofunzione ${}^a\mathcal{F}_1$ del potenziale di Pöschl-Teller corrispondente al livello eccitato in questione non è ovviamente ortogonale all'autofunzione dello stato fondamentale di $S(x)$. Non insisteremo su questo punto (sebbene sembri abbastanza chiaro che un valore assai migliore di $-1,3 \text{ MeV}$ sia ottenibile ⁽⁷⁾ per l'energia del livello $2S$), perchè lo stato in questione non presenta alcun interesse, in quanto instabile per disintegrazione in due deutoni oppure in un tritone (He^3) e in un protone (neutrone).

4. - Raffinamento dell'approssimazione nel caso dell' H^3 .

I valori dell'energia dell' H^3 e dell' He^4 che abbiamo ottenuto nei numeri precedenti basandoci sull'idea di cercare il più basso autovalore associato alla

(7) Per fare un calcolo accurato (e in ogni caso errato per eccesso) dell'energia di legame del considerato livello $2S$ basterebbe prendere come funzione variazionale $C_0 {}^a\mathcal{F}_0 + C_1 {}^a\mathcal{F}_1$ e considerare la radice più alta dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero il determinante ottenuto minimizzando il valore medio dell'hamiltoniana rispetto a C_0, C_1 .

classe di funzioni della sola ϱ o R possono essere naturalmente migliorati introducendo nelle funzioni variazionali le altre variabili.

Tale estensione sarà qui fatta nel solo caso dell' H^3 ; si ha di qui un'idea dei risultati che si possono ottenere per l' He^4 .

Una funzione completamente simmetrica nei tre vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, la quale sia, quando espressa mediante $\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{X}$, indipendente dal vettore \mathbf{X} (e sia invariante rispetto a rotazioni), può sempre essere espressa come funzione di tre argomenti completamente simmetrici indipendenti. Tali argomenti sono ricavabili in base alle stesse caratteristiche geometriche del triangolo costituito dai tre nucleoni, e sono, ad esempio, oltre alla grandezza: $\varrho^2 = r^2 + q^2$ precedentemente introdotta, l'area A del triangolo e il prodotto p delle lunghezze dei tre lati del triangolo stesso. Indicando con $:$ proporzionalità, e riportandoci alle notazioni del numero 2 è:

$$A : rq \sin \psi : \sin 2\theta \sin \psi ,$$

$$p^2 : r^2 \left(q^2 - \frac{1}{3} r^2 \right)^2 : \cos^2 \theta (3 - 4 \cos^2 \theta)^2 : \cos^2 3\theta ;$$

la funzione d'onda più generale sarà perciò una $\varphi(\varrho, \sin 2\theta \sin \psi, |\cos 3\theta|)$. Per vedere l'influenza delle nuove variabili, faremo i calcoli con la funzione variazionale:

$$(49) \quad \varphi(\varrho)[1 + \beta \cos^2 3\theta]:$$

inserendo la (49) nel principio variazionale (6) (7), con calcoli simili ai precedenti, seppure un po' più complicati, si giunge per la $F(x)$ (che è collegata alla $\varphi(\varrho)$ dalle (14) (15)) all'equazione (50) nella quale compare ora anche il parametro β che può essere variato così da render minimo il più basso autovalore dell'equazione (50) stessa:

$$(50) \quad F'' - V^*(x)F + \frac{2Ma^2}{\hbar^2} EF = 0 ,$$

con

$$V^*(x) = V(x) + \frac{9}{2} \frac{\beta^2}{\sigma} \frac{1}{x^2} - \frac{42,4543}{\sigma} \frac{\exp[-x^2]}{x^2} .$$

$$\left[-\tau J_2(ix^2) - 2\tau J_4(ix^2) + \frac{5}{2} i\chi J_5(ix^2) + \frac{7}{2} i\chi J_7(ix^2) \right] ,$$

ove J_2, J_4, J_5, J_7 sono funzioni di Bessel e le costanti σ, τ, χ sono date da:

$$\sigma = 1 + \frac{3}{8} \beta^2 + \beta ,$$

$$\tau = \beta + \frac{\beta^2}{2} , \quad \chi = \frac{\beta^2}{8} .$$

È chiaro che ponendo $\beta = 0$ nella (50) si ricade nella (17). È facile rendersi conto calcolando $V^*(x)$ per vari valori di x scelti nella regione in cui l'autofunzione ${}^{(H^3)}\mathcal{F}_0(x)$ è massima che la quantità $V^*(x)$ è in tale regione generalmente minima per un valore di β intorno a 0,22. L'integrale:

$$\int_0^{\infty} {}^{(H^3)}\mathcal{F}_0(x)^2 \{P(x) - V^*(x)\} dx,$$

è stato valutato per $\beta = 0,22$ e si è visto avere un piccolissimo valore positivo dell'ordine di 10^{-3} .

Segue che il più basso autovalore del potenziale $V^*(x)$ coincide entro le prime due cifre decimali con l'autovalore più basso del puro potenziale di Pöschl-Teller e vale quindi $-7,79$ MeV. Di modo che l'energia dello stato fondamentale dell' H^3 è certamente minore di $-7,79$ MeV.

5. — Discussione.

Il metodo esposto conduce, come si sarà osservato, a degli ottimi valori dell'energia di legame. Vogliamo qui elencare i principali risultati del metodo.

1) Esso fornisce, all'approssimazione zero, un valore dell'energia di legame altrettanto buono di quello ottenuto variazionalmente da MARGENAU e TYRREL e da MARGENAU e WARREN per l' H^3 e l' He^4 con un sistema di rispettivamente 14 e 11 funzioni; e, grosso modo, altrettanto buono di quello ottenuto da SVARTHOLM; inoltre esso permette di valutare immediatamente, senza ulteriori calcoli, la presenza di livelli eccitati, aventi la stessa simmetria dello stato fondamentale.

2) Il raffinamento (49) della funzione d'onda per l' H^3 conduce a un valore dell'energia per questo nucleo *assai più basso di quelli finora ottenuti*; esso è tale da far ritornare in discussione la questione della coerenza dei parametri sollevata da RARITA e PRESENT ⁽⁴⁾ ⁽⁸⁾, questione che tuttavia non discuteremo in quanto: a) sarebbe necessario svolgere gli analoghi calcoli raffinati per l' He^4 ; b) è un po' sorpassata per la indubbia presenza delle forze tensoriali.

3) Conduce alla forma asintotica corretta delle funzioni d'onda, ciò che è importante per trattare problemi di fotodisintegrazione e di fotoproduzione di mesoni; e la forma delle funzioni di onda è relativamente semplice (vedasi (25)).

⁽⁸⁾ L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (Amsterdam, 1948), pag. 305.

4) Giustifica parzialmente il «two equivalent body method» di FEENBERG ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾ in quanto riconduce la risoluzione del problema dell' H^3 e dell' He^4 alla risoluzione di una equazione del tipo del deutone.

Notiamo ancora che i calcoli numerici sono estremamente semplici e, per quanto riguarda l'approssimazione zero, eseguibili in una decina di giorni. La maggiore semplicità dipende dal fatto che, una volta trovata una curva che approssimi bene il potenziale efficace, si tratta soltanto di calcolare integrali del tipo (27) (45) e che, sebbene nel presente lavoro essi siano stati calcolati esatti a tre cifre decimali, è possibile per tali integrali una rapida valutazione più grossolana, in quanto essi portano soltanto una correzione relativamente piccola all'energia totale. Non si ha a che fare come nei metodi variazionali usuali con una situazione in cui l'energia totale si ottiene come piccola differenza tra un grosso contributo dovuto alla energia cinetica ed uno circa altrettanto grosso dell'energia potenziale, di modo che il piccolo errore relativo nella valutazione di una di queste grandezze porta un forte errore sul valore ottenuto per l'energia.

Vogliamo infine notare che in un recentissimo lavoro (gentilmente segnalatoci dal prof. MÖLLER) IRWING ⁽¹⁰⁾ ha calcolato l'energia di legame dell' H^3 e dell' He^4 con un potenziale di Yukawa ed esponenziale facendo uso di funzioni d'onda che, nelle nostre notazioni hanno la forma:

$$\varrho^{-n} \exp [-\alpha \varrho] \quad \text{e} \quad R^{-n} \exp [-\alpha R],$$

(rispettivamente per l' H^3 e l' He^4) e minimizzando rispetto a α e ad n .

Le funzioni variazionali usate da IRWING, che sono notevoli in quanto tra tutte quelle precedentemente usate in problemi nucleari sono le prime a godere di una certa semplicità, pur avendo la corretta forma asintotica, rientrano nella classe $\varphi(\varrho)$ o $\varphi(R)$ da noi usate.

L'applicazione del presente metodo a nuclei superiori alla particella α sembra difficilmente possibile; il problema di cercare nel caso di un nucleo superiore alla particella α la migliore funzione tra la classe delle funzioni di un argomento convenientemente scelto si riconduce in tal caso, poichè a causa del principio di Pauli l'argomento è necessariamente non simmetrico, anzichè alla risoluzione di una equazione differenziale ordinaria alla risoluzione di una complicata equazione integro-differenziale ⁽¹¹⁾.

Ringrazio il prof. B. FERRETTI per le varie utili discussioni avute.
Desidero inoltre ringraziare, nelle persone del suo direttore prof. M. PICONE

⁽⁹⁾ H. BETHE e R. BACHER: *Rev. Mod. Phys.*, **8**, 82 (1936).

⁽¹⁰⁾ J. IRWING: *Phil. Mag.*, **42**, 338 (1951).

⁽¹¹⁾ Vedi ad es. J. A. WHEELER: *Phys. Rev.*, **52**, 1083 (1937).

e dei suoi collaboratori prof. A. GHIZZETTI e dott. W. GROSS, l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo per l'esecuzione dei calcoli numerici relativi alla valutazione degli integrali: (27), (45), (52).

APPENDICE

a) Le formule usate nel testo per il calcolo dei vari integrali sono:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), \quad B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)};$$

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} \exp[iz \cos t] \cos nt dt;$$

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z).$$

b) Si può fare un controllo diretto della (10) inserendo in essa al posto di $\varphi(\varrho)$, $\exp[-k\varrho^2]$. Tenendo presente la formula:

$$\int_0^{\infty} \exp[-at] J_{\nu}(bt) t^{\nu} dt = \frac{(2b)^{\nu} \Gamma(\nu + 1/2)}{(a^2 + b^2)^{\nu+1/2} \sqrt{\pi}} \quad (Re \nu > 0; Re a > |Im b|),$$

si ottiene naturalmente il risultato (118) di BETHE e BACHER.

SUMMARY

A method much more effective than the former ones has been used to calculate the binding energies of H^3 and He^4 . The idea on which the method is based is to look for the minimum of the mean value of the Hamiltonian not among a class of functions containing some parameters, but among the whole class of the functions of an argument (which is assumed to be the sum of the squares of the distances between the nucleons). With a gaussian potential and central forces (with the usual choice of parameters of Margenau) one obtains in the first approximation -7.24 MeV for H^3 and -26.77 MeV for He^4 . These values have to be compared with -7.21 MeV, and respectively -26.76 MeV obtained by Margenau making use of a system of 14 and 11 variational functions. A refinement for H^3 lowers its energy to -7.79 MeV. Other advantages of the method (among which we mention the right asymptotic form of the wave functions obtained) are listed in section 5.

Sui metodi di soluzione delle equazioni della cascata elettrofotonica.

F. MONTICELLI

Assicurazioni Generali - Venezia

(ricevuto il 30 Marzo 1952)

Riassunto. — Le equazioni fondamentali della cascata elettrofotonica vengono ricondotte ad una equazione integrale di seconda specie del tipo di Volterra. Si dimostra che le soluzioni di SNYDER e di SCOTT e quella di BHABHA e CHAKRABARTY soddisfano a tale equazione.

Recentemente H. SNYDER ⁽¹⁾ e W. T. SCOTT ⁽²⁾, con metodi equivalenti, il primo usando antitrasformate di Mellin, il secondo usando le trasformate di Mellin e di Laplace, hanno dato una medesima soluzione alle equazioni fondamentali della cascata unidimensionale elettrofotonica nell'approssimazione B di ROSSI e GREISEN ⁽³⁾ con sezioni d'urto asintotiche.

Il confronto numerico dello spettro integrale di questa soluzione con quella ottenuta precedentemente da H. J. BHABHA e S. K. CHAKRABARTY ⁽⁴⁾ ha rivelato delle differenze che non sono a priori giustificabili ⁽⁵⁾.

Scopo di questo lavoro è di ricostruire tali soluzioni per altra via, partendo cioè da una equazione integrale di Volterra di seconda specie, ottenuta con opportune integrazioni delle equazioni fondamentali nello schema della trasformata di Laplace.

Questo attacco si è dimostrato assai fecondo in quanto ci ha dato imme-

⁽¹⁾ H. SNYDER: *Phys. Rev.*, **76**, 1563 (1949).

⁽²⁾ W. T. SCOTT: *Phys. Rev.*, **80**, 611 (1950).

⁽³⁾ B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

⁽⁴⁾ H. J. BHABHA e S. K. CHAKRABARTY: *Phys. Rev.*, **74**, 1352 (1948).

⁽⁵⁾ H. MESSEL: *Phys. Rev.*, **82**, 259 (1951).

diatamente l'equazione di partenza di SCOTT e successivamente la sua eq. (10). Inoltre, ci ha consentito di usare una rappresentazione in serie di potenze di $(-\beta/E)$, che ci ha condotto immediatamente alla soluzione (14) di БИЯБНА e CHAKRABARTY.

1. — Come è noto, le equazioni fondamentali della cascata nell'approssimazione B di ROSSI e GREISEN sono:

$$(1a) \quad \frac{\partial \pi(E, t)}{\partial t} - \beta \frac{\partial \pi(E, t)}{\partial E} = \\ = \int_E^\infty \pi(E', t) R(E', E' - E) \frac{E' - E}{E'^2} dE' - \pi(E, t) \int_0^E R(E, E') \frac{E'}{E^2} dE' + \\ + 2 \int_E^\infty \gamma(E', t) R(E, E') \frac{dE'}{E'},$$

$$(1b) \quad \frac{\partial \gamma(E, t)}{\partial t} = \int_E^\infty \pi(E', t) R(E', E) \frac{E}{E'^2} dE' - D\gamma(E, t),$$

con

$$(1c) \quad R(E', E) = 1 - \left(\alpha + \frac{4}{3} \right) \frac{E'}{E} \left(1 - \frac{E'}{E} \right) \quad \text{e} \quad D = \frac{7}{9} - \frac{\alpha}{6},$$

dove

$$(1d) \quad \alpha = 9 \ln(183Z^{-1/3}) \sim 1/40.$$

Per $\pi(E, t)$ (rispettivamente $\gamma(E, t)$) s'intende il numero medio di elettroni (rispettivamente fotoni) di energia compresa fra E e $E + dE$, nell'intervallo di profondità che va da t a $t + dt$, con t misurato in unità di radiazione. β rappresenta la perdita di energia per ionizzazione per unità t .

Le sezioni d'urto per produzione di coppie e di Bremsstrahlung sono quelle asintotiche usate da ROSSI e GREISEN, benchè espresse in forma più compatta.

Applicando la trasformata di Laplace

$$L_r(E, \lambda) = \int_0^\infty \exp[-\lambda t] f(E, t) dt$$

alla (1a) e alla (1b), si ottiene il seguente sistema:

$$(2a) \quad \lambda L_{\pi}(E, \lambda) - \beta \frac{\delta L_{\pi}(E, \lambda)}{\delta E} = \pi(E, 0) + \\ + \int_E^{\infty} L_{\pi}(E', \lambda) R(E', E' - E) \frac{E' - E}{E'^2} dE' - L_{\pi}(E, \lambda) \int_0^E R(E, E') \frac{E'}{E^2} dE' + \\ + 2 \int_E^{\infty} L_{\gamma}(E', \lambda) R(E, E') \frac{dE'}{E'},$$

$$(2b) \quad (\lambda + D) L_{\gamma}(E, \lambda) = \int_E^{\infty} L_{\pi}(E', \lambda) R(E', E) \frac{E}{E'^2} dE',$$

avendo posto $\gamma(E, 0) = 0$ e chiamando $\pi(E, 0)$ la sorgente elettronica.

Per risolvere il sistema (2), si noti che, tenendo conto della (2b), l'ultimo termine della (2a) si può scrivere:

$$(3a) \quad 2 \int_E^{\infty} L_{\gamma}(E', \lambda) R(E, E') \frac{dE'}{E'} = \frac{2}{\lambda + D} \int_E^{\infty} L_{\pi}(E', \lambda) \bar{R}(E', E) \frac{dE'}{E'},$$

dove

$$(3b) \quad \bar{R}(E', E) = \int_E^{E'} R(E', \eta) R(E, \eta) \frac{d\eta}{E'},$$

e perciò la (2a) diventa:

$$(4) \quad \lambda L_{\pi}(E, \lambda) - \beta \frac{\delta L_{\pi}(E, \lambda)}{\delta E} = \pi(E, 0) + \int_E^{\infty} L_{\pi}(E', \lambda) R(E', E' - E) \frac{E' - E}{E'^2} dE' - \\ - L_{\pi}(E, \lambda) \int_0^E R(E, E') \frac{E'}{E^2} dE' + \frac{2}{\lambda + D} \int_E^{\infty} L_{\pi}(E', \lambda) \bar{R}(E', E) \frac{dE'}{E'}.$$

La (4) è un'equazione integro-differenziale nella sola funzione incognita $L_{\pi}(E, \lambda)$, essendo note $\pi(E, 0)$, $R(E', E)$ e $\bar{R}(E', E)$.

2. - Una delle condizioni di limite cui deve soddisfare la $L_{\pi}(E, \lambda)$ è che sia ⁽³⁾:

$$(5) \quad \lim_{E \rightarrow \infty} L_{\pi}(E, \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{almeno come } 1/E^{s+1},$$

dove s è un numero complesso la cui parte reale è > 0 .

Ritenendo questo limite, e sostituendo nella (4) a E la variabile x , integriamo ambo i membri di questa equazione su x da E a ∞ , e abbiamo, cambiando opportunamente gli ordini di integrazione:

$$(6) \quad \beta L_{\pi}(E, \lambda) = \int_E^{\infty} \pi(x, 0) dx - \lambda \int_E^{\infty} L_{\pi}(x, \lambda) dx - \\ - \int_E^{\infty} L_{\pi}(x, \lambda) dx \int_0^x R(x, E') \frac{E'}{x^2} dE' + \int_E^{\infty} L_{\pi}(E', \lambda) dE' \int_E^{E'} R(E', E' - x) \frac{E' - x}{E'^2} dx + \\ + \frac{2}{\lambda + D} \int_E^{\infty} L_{\pi}(E', \lambda) dE' \int_E^{E'} \bar{R}(E', x) \frac{dx}{E'}.$$

Nell'ultimo e nel penultimo integrale, dove sono stati scambiati gli ordini di integrazione, E' varia da E a ∞ mentre x varia da E a E' .

Poichè è lecito scambiare nei primi tre integrali la x con la E' , si ottiene infine:

$$(7a) \quad \beta L_{\pi}(E, \lambda) = \int_E^{\infty} \pi(E', 0) dE' - \int_E^{\infty} L_{\pi}(E', \lambda) K(E', E) dE',$$

con

$$(7b) \quad K(E', E) = \lambda + \int_0^{E'} R(E', x) \frac{x}{E'^2} dx - \\ - \int_E^{E'} R(E', E' - x) \frac{E' - x}{E'^2} dx - \frac{2}{\lambda + D} \int_E^{E'} \bar{R}(E', x) \frac{dx}{E'}.$$

La (7a) rappresenta un'equazione integrale di seconda specie del tipo di Volterra di cui la (7b) è il nucleo.

La trasformata di Mellin applicata alla (7a) porge:

$$(8) \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{E}{\beta}\right)^s L_{\pi}(E, \lambda) d\left(\frac{E}{\beta}\right) \equiv N_{\pi}(s, \lambda) = \\ = \int_0^{\infty} \left(\frac{E}{\beta}\right)^s d\left(\frac{E}{\beta}\right) \int_E^{\infty} \pi(E', 0) \frac{dE'}{\beta} - \int_0^{\infty} \left(\frac{E}{\beta}\right)^s d\left(\frac{E}{\beta}\right) \int_E^{\infty} L_{\pi}(E', \lambda) K(E', E) \frac{dE'}{\beta} = \\ = \frac{M_{\pi}(s+1, 0)}{s+1} - N_{\pi}(s+1, \lambda) \int_0^1 \left(\frac{E}{E'}\right)^s K(E', E) d\left(\frac{E}{E'}\right).$$

Calcoliamo l'integrale a terzo membro ponendo $v = E/E'$ e il valore di $K(E', E)$ dato dalla (7b), cioè (v. Appendice I):

$$(9) \quad \int_0^1 v^s K(v) dv = \frac{1}{s+1} \left\{ \lambda - \int_0^1 [(1-z)^{s+1} - 1] R(z) z dz - \right. \\ \left. - \frac{2}{\lambda + D} \int_0^1 \left(\frac{z}{w} \right)^{s+1} R(z, w) d \left(\frac{z}{w} \right) \int_0^1 w^{s+2} R(w) dw \right\}.$$

Negli integrali a secondo membro si riconoscono rispettivamente i coefficienti $A(s+1)$, $B(s+1)$ e $C(s+1)$ di ROSSI e GREISEN. Perciò, chiamando $\lambda_1(s)$ e $\lambda_2(s)$ le radici dell'equazione:

$$(10) \quad \lambda^2 + \lambda[A(s) + D] + A(s)D - B(s)C(s) = 0,$$

si ha:

$$(11) \quad \int_0^1 v^s K(v) dv = \frac{1}{s+1} \frac{[\lambda - \lambda_1(s+1)][\lambda - \lambda_2(s+1)]}{\lambda + D} = \frac{G(s+1, \lambda)}{s+1},$$

e la trasformata di Mellin della (7a) diventa:

$$(12) \quad N_\pi(s, \lambda) = \frac{M_\pi(s+1, 0)}{s+1} - N_\pi(s+1, \lambda) \frac{G(s+1, \lambda)}{s+1},$$

che, tenendo conto delle diverse notazioni e della integrazione eseguita sulla (4), si riduce facilmente all'eq. (5) di Scott.

3. - Un rapido esame del nucleo (7b) ci mostra che tale nucleo non è nè simmetrico nè antisimmetrico. Possiamo dunque fin d'ora affermare che la (7a) non ammette autovalori e quindi non sarà possibile ottenerne la soluzione con serie di autofunzioni, usando i noti metodi variazionali ⁽⁶⁾.

È noto però che l'eq. (7a) ha una e una sola soluzione agevolmente ricavabile con il metodo delle approssimazioni successive. Con tale metodo, ponendo al posto di $L_\pi(E', \lambda)$ il primo termine a secondo membro come approssimazione zero e, via via, i valori di $L_\pi(E, \lambda)$ che si ottengono successivamente a sinistra, si raggiunge rapidamente la soluzione:

$$(13a) \quad \beta L_\pi(E, \lambda) = \int_E^\infty \pi(E', 0) dE' + \sum_{n=1}^\infty \left(-\frac{1}{\beta} \right)^n \int_E^\infty \pi(E', 0) dE' \int_E^{E'} K_n(y, E) dy,$$

⁽⁶⁾ G. SANSONE: *Eq. differenziali nel campo reale*. I (Bologna, 1948), p. 293 e segg.

con

$$(13b) \quad K_n(y, E) = \int_E^y K_{n-1}(y, z) K(z, E) dz \quad (n = 2, 3, 4, \dots; K_1 = K),$$

relazione, quest'ultima, che dà l' n -simo nucleo iterato dal precedente $K_{n-1}(y, E)$.

Nel caso di una sorgente elettronica monocromatica di energia E_0 , cioè con

$$(14) \quad \pi(E', 0) = \delta(E_0 - E'),$$

la (13a) si scriverà:

$$(15) \quad \beta \ddot{L}_\pi(E_0, E, \lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\beta}\right)^n \int_E^{E_0} K_n(y, E) dy,$$

e con una sorgente elettronica qualsiasi, per il principio di sovrapposizione, si avrà dalla (15):

$$(16) \quad L_\pi(E, \lambda) = \int_E^{\infty} \pi(E', 0) L_\pi(E', E, \lambda) dE'.$$

Se vogliamo ora applicare la trasformata di Mellin alla (13a), tramite la (13b) e la (11), otteniamo (v. Appendice II):

$$(17) \quad N_\pi(s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s!}{(s+n+1)!} \cdot \\ \cdot M_\pi(s+n+1, 0) G(s+1, \lambda) G(s+2, \lambda) \dots G(s+n, \lambda),$$

che è l'eq. (10) di Scott, salvo le solite sostituzioni.

La (15) non si presta all'antitrasformata di Laplace in quanto ogni suo n -simo termine ha $2n$ zeri distinti e un polo di ordine n nel punto $\lambda = -D$ e la medesima osservazione vale per l'eq. (10) di Scott.

Questo Autore, però, seguendo un metodo indicato da SNYDER ⁽¹⁾, per mezzo di prodotti infiniti delle funzioni $G(s, \lambda)$, con valori opportuni delle s , ha ottenuto l'antitrasformata di Laplace, utilizzando gli infiniti poli, successivi ai $2n$ zeri di ciascun termine, che a questo modo si sono venuti a creare.

4. - Vediamo ora come la presente impostazione possa condurre alla soluzione (14) di BHABHA e CHAKRABARTY.

A tale scopo consideriamo una rappresentazione della $L_\pi(E, \lambda)$ del tipo:

$$(18) \quad L_\pi(E, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{E}\right)^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{k(s, n)}{E^s} ds,$$

dove C indica un percorso di integrazione che va da $\sigma - i\infty$ a $\sigma + i\infty$ e cioè la retta parallela all'asse immaginario che passa per $\sigma > 1$, giusta la nostra condizione di limite (5) assunta all'inizio del n. 2. Evidentemente i coefficienti delle potenze di $(-\beta'E)$ sono antitrasformate di Mellin da determinarsi.

Tenendo conto della (18), la (7a) si può anche scrivere:

$$(19) \quad \beta L_{\pi}(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{M_{\pi}(s-1, 0)}{s-1} \frac{ds}{E^{s-1}} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{E} \right)^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{k(s, n)}{E^s} ds \int_E^{\infty} \left(\frac{E}{E'} \right)^{s+n} K(E', E) dE'.$$

Ponendo come al solito $v = E/E'$, l'ultimo integrale a destra, per la (11), si scrive:

$$(20) \quad E \int_1^{\infty} v^{s+n} K(v) d\left(\frac{1}{v}\right) = E \int_0^1 v^{s+n-2} K(v) dv = E \frac{G(s+n-1, \lambda)}{s+n-1}.$$

Dividendo ambo i membri per β , la (19) diventa allora:

$$(21) \quad L_{\pi}(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi i \beta} \int_C \frac{M_{\pi}(s-1, 0)}{s-1} \frac{ds}{E^{s-1}} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{E} \right)^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{k(s, n)}{E^s} \frac{G(s+n-1, \lambda)}{s+n-1} ds.$$

Sommando il primo termine a secondo membro con il primo termine della serie, e scrivendo il resto di quest'ultima spostando n in $n+1$, potremo esprimere la (21) così:

$$(22) \quad L_{\pi}(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi i \beta} \int_C \frac{ds}{E^{s-1}} \frac{1}{s-1} \{ M_{\pi}(s-1, 0) - k(s, 0)G(s-1, \lambda) \} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{E} \right)^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{k(s, n+1)}{E^s} \frac{G(s+n, \lambda)}{s+n} ds.$$

Il secondo membro della (22) coinciderà con il secondo membro della (18) se

$$(23a) \quad k(s, 0)G(s-1, \lambda) = M_{\pi}(s-1, 0)$$

e

$$(23b) \quad k(s, n+1) \frac{G(s+n, \lambda)}{s+n} = k(s, n). \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Queste relazioni ricorrenti corrispondono, *mutatis mutandis*, alle relazioni (8) e (13) usate da BHABHA e CHAKRABARTY.

Infatti, tenuto conto che la funzione $w_n(s, t)$ di questi Autori è un'opportuna trasformata di Mellin della $\pi(E, t)$, applicando alle loro eq. (8) e (13) la trasformata di Laplace, si ottiene rispettivamente, con i nostri simboli:

$$(24a) \quad N_{w_0}(s, \lambda) = 1/G(s-1, \lambda)$$

e

$$(24b) \quad N_{w_n}(s, \lambda) = N_{w_{n-1}}(s, \lambda)/G(s+n-1, \lambda) \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

per il teorema del Faltung e per la (24a).

Basterà ora porre in queste:

$$(25) \quad N_{w_n}(s, \lambda) = \frac{k(s, n)}{M_{\pi}(s-1, 0)} \frac{(s-1)!}{(s+n-1)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

perchè le (24) si riducano alle nostre (23).

Col solito procedimento ricorrente si trova dalle (23) il valore di $k(s, n)$ che è:

$$(26) \quad k(s, n) = \frac{(s+n-1)!}{(s-1)!} \frac{M_{\pi}(s-1, 0)}{\prod_{j=1}^{n+1} G(s+n-j, \lambda)} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Ponendolo infine nel secondo membro della (18), otteniamo, per il caso di una sorgente monocromatica ($M_{\pi}(s-1, 0) = E_0^{s-1}$):

$$(27) \quad L_{\pi}(E_0, E, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{E}\right)^n \frac{1}{2\pi i E_0} \int_C \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{(s+n-1)!}{(s-1)!} \frac{ds}{\prod_{j=1}^{n+1} G(s+n-j, \lambda)}.$$

La (27) è la trasformata di Laplace della soluzione (14) data da BHABHA e CHAKRABARTY.

Resta così dimostrato che la soluzione di questi Autori è una rappresentazione in serie di potenze di $(-\beta/E)$ della nostra soluzione (15), di cui l'eq. (10) di Scott è la relativa trasformata di Mellin.

È mio piacere ringraziare qui il prof. PUPPI per il suo cortese interessamento e il prof. CLEMENTEL per le utili discussioni nello svolgimento del presente lavoro.

APPENDICE I

a) I coefficienti di Rossi e Greisen della (9) si trovano nel modo seguente ($z = x/E'$):

$$\int_0^1 v^s dv \left\{ \int_0^1 R(z) z dz - \int_0^1 R(1-z)(1-z) dz \right\} = \\ = -\frac{1}{s+1} \int_0^1 [(1-z)^{s+1} - 1] R(z) z dz = \frac{A(s+1)}{s+1},$$

avendo cambiato l'ordine di integrazione e sostituito $1-z$ con z nel secondo integrale.

b) Ponendo al posto di $\bar{R}(z)$ il suo valore dato dalla (3b) e cambiando due volte l'ordine di integrazione, si ha ($w = \eta/E'$):

$$2 \int_0^1 v^s dv \int_0^1 \bar{R}(z) dz = \\ = \frac{2}{s+1} \int_0^1 w^{s+2} R(w) dw \int_0^1 \left(\frac{z}{w}\right)^{s+1} R(z, w) d\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{C(s+1)B(s+1)}{s+1},$$

poichè

$$B(s+1) = 2 \int_0^1 \left(\frac{z}{w}\right)^{s+1} R(z, w) d\left(\frac{z}{w}\right) \quad \text{e} \quad C(s+1) = \int_0^1 w^{s+2} R(w) dw.$$

APPENDICE II

Dividendo ambo i membri della (13a) per β e applicandovi la trasformata di Mellin, cambiando, nell' n -esimo termine della serie, l'ordine di integrazione due volte, si trova:

$$(\cdot) \quad \int_0^\infty \left(\frac{E'}{\beta}\right)^s L_\pi(E, \lambda) d\left(\frac{E'}{\beta}\right) \equiv N_\pi(s, \lambda) = \\ = \frac{M_\pi(s+1, 0)}{s+1} + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^\infty \left(-\frac{1}{\beta}\right)^n \int_0^\infty \pi(E', 0) dE' \int_0^{E'} \left(\frac{E}{\beta}\right)^s K_n(y, E) \frac{dE}{\beta}.$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri della (13b) per $(E/\beta)^s d(E/\beta)$ e integriamo da 0 a y ; cambiando a secondo membro l'ordine di integrazione una volta soltanto:

$$\int_0^y \left(\frac{E}{\beta}\right)^s K_n(y, E) \frac{dE}{\beta} = \beta \frac{G(s+1, \lambda)}{s+1} \int_0^y \left(\frac{z}{\beta}\right)^{s+1} K_{n-1}(y, z) \frac{dz}{\beta},$$

avendo moltiplicato e diviso $K(z, E)$ per $(z/\beta)^{s+1}$ e usando la (11).

Questa relazione, per ricorrenza, ci dà subito:

$$\int_0^y \left(\frac{E}{\beta}\right)^s K_n(y, E) \frac{dE}{\beta} = \beta^{n-1} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{s+n} \frac{s!}{(s+n)!} G(s+1, \lambda) G(s+2, \lambda) \dots G(s+n, \lambda),$$

che, posta nella (\cdot), la riduce alla (17) del testo.

SUMMARY

By using Laplace transformations, the diffusion equations of the shower theory are reduced to a Volterra integral equation, a solution of which is obtained by using the method of successive approximations. It is shown that this solution corresponds to Scott's one. Further it is shown that the same equation leads to the solution of BHABHA and CHAKRABARTY.

Sulla teoria evaporativa delle disintegrazioni nucleari.

F. FERRARI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio degli Ioni veloci del C.N.R. - Padova

C. VILLI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

(ricevuto il 7 Aprile 1952)

Riassunto. — Il modello a gas di Fermi è stato esteso alle alte temperature nucleari mediante un procedimento matematico non soggetto alla nota condizione restrittiva $\tau/\psi \ll 1$. I processi evaporativi per varie energie di eccitazione del nucleo sono stati studiati tenendo conto dell'effetto delle interazioni nucleari, della diminuzione della temperatura nucleare e della variazione, durante il decorso del processo, del numero di massa. Si discutono le previsioni teoriche che risultano in soddisfacente accordo con i dati sperimentali.

1. — Introduzione.

Lo studio delle disintegrazioni nucleari viene attualmente compiuto in gran parte mediante l'esame di stelle nelle emulsioni fotografiche. I numerosi risultati sperimentali già raccolti con questa tecnica hanno dato lo spunto a diverse considerazioni teoriche intese ad interpretarne le modalità più importanti.

Limitandoci qui al solo caso di disintegrazioni provocate in nuclei pesanti dell'emulsione (Ag, Br), il quadro teorico può essere riassunto nel modo seguente. Il nucleone primario incidente, ionizzante o no, interagisce in un primo tempo con un solo nucleone del nucleo e può dare luogo sia ad un urto elastico sia, se la sua energia è sufficientemente elevata, ad uno anelastico. In questo caso vengono emessi un certo numero di mesoni, che appaiono in genere come rami di sciame, e nucleoni di rinculo e di knock-on espulsi dal nucleo per urti secondari dai mesoni e dalla coppia primaria di nucleoni. Nel caso,

invece, dell'urto anelastico si hanno ancora generalmente nucleoni di knock-on, ma mancano i rami di sciame.

Con ciò ha termine la prima fase, quasi immediata del processo; successivamente ha inizio, un processo molto più lento dovuto al fatto che parte dell'energia del primario viene ceduta per urti larghi ed è rapidamente distribuita a tutti i nucleoni del nucleo. Il conseguente stato di eccitazione nucleare diffusa provoca l'emissione di rami di bassa energia (tracce nere) secondo il modello evaporativo proposto da WEISSKOPF ⁽¹⁾.

Recenti tentativi (FERMI ⁽²⁾) sembrano pure aprire una via promettente per l'interpretazione delle collisioni anelastiche e rendere conto dell'andamento delle particelle di sciame. Per quanto riguarda invece la zona delle energie intermedie (rami grigi) si hanno per ora solo indicazioni qualitative e vi sono anzi a tale proposito divergenze di opinione che fanno apparire la loro interpretazione ancora piuttosto problematica.

Un primo modello, proposto da GOLDBERGER ⁽³⁾, considera i rami grigi come essenzialmente dovuti a protoni di rinculo e di knock-on nell'urto diretto del primario e negli urti immediatamente successivi a questo. Secondo questo schema, l'energia del primario E_p viene spesa in massima parte oltre che nella creazione dello sciame di mesoni, nell'emissione di rami grigi di knock-on in modo che l'energia di eccitazione del nucleo E_0 , responsabile del fenomeno di evaporazione, è solo una piccola frazione di E_p . (Anche quando non vi sono particelle di sciame essa non supererebbe i 100 MeV).

Il modello opposto, prospettato da CAMERINI e coll. ^(4,5) sulla base dei loro dati sperimentali relativi a stelle di cospicua energia, pure non escludendo che parte dei rami grigi possa effettivamente corrispondere a nucleoni di rinculo e di knock-on, considera la maggior parte di essi come dovuta ad un prolungamento dello spettro di evaporazione verso energie più alte di quanto la solita teoria lasci prevedere. Segue allora che, in assenza di rami di sciame, l'energia di eccitazione E_0 potrebbe essere prossima all'energia ceduta al nucleo dal primario E_p e, secondo il gruppo di Bristol, raggiungere valori intorno a 800-1000 MeV.

Senza voler affatto discutere quale dei due suddetti modelli sia da consi-

⁽¹⁾ V. WEISSKOPF: *Phys. Rev.*, **52**, 295 (1937).

⁽²⁾ E. FERMI: *Progr. Theor. Phys.*, **5**, 570 (1950).

⁽³⁾ M. L. GOLDBERGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1269 (1948).

⁽⁴⁾ U. CAMERINI, T. COOR, P. H. FOWLER, W. O. LOCK, H. MUIRHEAD, e N. TOBIN: *Phil. Mag.*, **40**, 1073 (1949); U. CAMERINI, P. H. FOWLER, V. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1949); U. CAMERINI, J. H. DAVIES, P. H. FOWLER, C. FRANZINETTI, H. MUIRHEAD, W. O. LOCK, O. H. PERKINS e G. YEKUTHIELY: *Phil. Mag.*, **42**, 1241 (1951).

⁽⁵⁾ U. CAMERINI, V. O. LOCK e D. H. PERKINS: *Progr. in Cosmic Ray Phys.* (Pub.) (1952).

siderarsi più aderente alla realtà fisica, abbiamo cercato di modificare l'usuale teoria della evaporazione per stabilire se essa possa rendere conto dell'emissione di almeno parte dei rami grigi, in modo da interpretare lo schema proposto dal gruppo di Bristol meglio di quanto sia stato sinora possibile.

Com'è noto, l'andamento dello spettro evaporativo delle particelle emesse dal nucleo dipende essenzialmente dalla relazione postulata tra energia di eccitazione, temperatura nucleare ed entropia. Tutte le teorie sinora svolte, salvo poche eccezioni basate sul modello a goccia, si sono fondate a tale scopo sulle formule della statistica di Fermi nel caso limite di un gas totalmente degenere, cioè per T così prossimo a zero che la relazione tra E_0 e T possa scriversi $E_0 = b \cdot T^2$ con b costante.

Anche i miglioramenti introdotti da vari Autori ^(6,7) alla primitiva teoria e consistenti nel tener conto della diminuzione della temperatura nucleare nel corso delle successive emissioni di particelle, nel considerare le forze di interazione fra i nucleoni, ecc., poggiavano sempre su questa medesima ipotesi. Tuttavia, ci si può facilmente convincere che, nel caso di disintegrazioni con energia di eccitazione rilevante, la corrispondente temperatura nucleare è di un ordine di grandezza tale da rendere molto inesatta la relazione $E_0 = b \cdot T^2$ e quindi non appare lecito per queste energie applicare le formule che si riferiscono ad un gas totalmente degenere, ma sembra consigliabile sostituirle con altre valide per qualunque temperatura.

Con questa rettifica siamo riusciti a modificare verso le alte energie la forma dello spettro di evaporazione con un risultato che sembra, rispetto a quelli ottenuti da altre teorie, in migliore accordo con i recenti dati sperimentali, semprechè si accetti di interpretare parte delle tracce grige come un annesso del processo evaporativo.

2. — Modello a gas di Fermi.

Com'è noto, l'equazione di stato di un gas totalmente degenere obbediente alla statistica di Fermi si ottiene eliminando fra le due relazioni ⁽⁸⁾

$$(1a) \quad N = \frac{3}{2} C \int_0^{\infty} E^{1/2} f(E) dE,$$

$$(1b) \quad U_{\text{tot}} = \frac{3}{2} C \int_0^{\infty} E^{3/2} f(E) dE,$$

⁽⁶⁾ E. BAGGE: *Cosmic Radiation* (Heisenberg, 1946), pag. 128.

⁽⁷⁾ K. J. LECOUTEUR: *Proc. Roy. Soc.*, **63**, 259 (1950).

⁽⁸⁾ H. A. BETHE: *Rev. Mod. Phys.*, **9**, 83 (1937).

il parametro $\lambda = \exp [-\psi/\tau]$ che compare nella funzione di distribuzione $f(E) = [\lambda \exp [E/\tau] + 1]^{-1}$. A tale scopo, si procede generalmente come segue: integrando per parti la relazione

$$(2) \quad I_i = \int_0^{\infty} \Phi_i(E) f(E) dE, \quad (i = 1, 2),$$

in cui possono compendiarsi le $(1; a, b)$ $[\Phi_1(E) = E^{1/2}; \Phi_2(E) = E^{3/2}]$, si ottiene, dopo aver posto $\Phi_i(E) = -\partial F_i/\partial E$ ed eseguito il cambiamento di variabile $x = (E - \psi)/\tau$

$$(3) \quad I_i = - \int_{-\psi/\tau}^{\infty} \frac{e^x (F_i(\psi + \tau \cdot x))}{(1 + e^x)^2} dx.$$

Nell'ipotesi che il gas sia fortemente degenere ($\lambda = \exp [-\psi/\tau] \ll 1$) la funzione $F_i(\psi + \tau x)$ che compare nella (3) può essere sviluppata in serie in un intorno di $x = 0$ e, ponendo senza sensibile errore $\psi/\tau \sim \infty$ si ricava che l'energia di eccitazione E_0 è legata alla temperatura nucleare τ dalla relazione $E_0 = b \cdot \tau^2$, in cui b è una costante ⁽⁹⁾.

Per ottenere una relazione tra E_0 e τ che sia valida per ogni temperatura nucleare, è necessario ricavare l'equazione di stato del gas nucleonico indipendentemente dalla condizione restrittiva $\tau/\psi \ll 1$. A tal fine, posto $y = \tau/\psi$, le $(1; a, b)$, tenuto conto della (3), possono scriversi nella forma:

$$(4a) \quad N = C\psi^{3/2} \int_{-1/y}^{\infty} \frac{(1 + yx)^{3/2} e^x}{(1 + e^x)^2} dx = C\psi^{3/2} \mu(y),$$

$$(4b) \quad U_{\text{tot}} = \frac{6}{5} C\psi^{5/2} \int_{-1/y}^{\infty} \frac{(1 + yx)^{5/2} e^x}{(1 + e^x)^2} dx = \frac{6}{5} C\psi^{5/2} \nu(y).$$

Fissato il valore di y , la (4a) consente di calcolare il valore del parametro ψ in funzione di y (*) ($Z = N = A/2$)

$$(4c) \quad \psi(y) = \left(\frac{A}{2C} \right)^{2/3} \mu^{-2/3}(y),$$

⁽⁹⁾ J. E. MAYER e M. G. MAYER: *Statistical Mechanics* (Oxford, 1938), pag. 374.

(*) La $\psi(y)$ definita dalla (4c) è una funzione decrescente con la temperatura τ ; nella zona di Fermi ($y < 0, 1$) tale diminuzione avviene secondo la legge

$$\psi = \psi_0 [1 - (\pi^2/12)(\tau/\psi_0)^2].$$

che, sostituita nella (4b), dà:

$$(4d) \quad U_{\text{tot}} = \frac{6C}{5} \left(\frac{A}{2C} \right)^{5/3} \mu^{-5/3}(y) \nu(y).$$

Dalla (4b), tenendo conto che $\mu(0) = \nu(0) = 1$, si ricava per $\tau = 0$ ($y = 0$) l'energia minima del gas di Fermi

$$(4e) \quad U_{\text{tot}} = \frac{6C}{5} \cdot \psi_0^{5/2},$$

essendo per la (4c)

$$(4f) \quad \psi(0) = \psi_0 = \left(\frac{A}{2C} \right)^{2/3},$$

che esprime l'energia di Fermi caratteristica degli insiemi che obbediscono al principio di esclusione di Pauli.

L'energia di eccitazione risulta quindi:

$$(5) \quad E(\tau) = U(\tau) - U(0) = \frac{6C}{5} \left(\frac{A}{2C} \right)^{5/3} [\mu^{-5/3}(y) \nu(y) - 1].$$

La (4e) definisce la massima energia cinetica sia dei neutroni che dei protoni, misurata a partire dal fondo della buca di potenziale. In virtù della legge $R = r_0 A^{1/3}$, in cui R è il raggio del nucleo di numero di massa A e $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ cm è il raggio di un nucleone, si ha che la costante C varia linearmente con il numero di massa e ψ_0 assume, tanto per i protoni quanto per i neutroni, il valore 21 MeV. Tenendo invece conto dell'eccesso neutronico si trova che l'energia di Fermi per i neutroni e, rispettivamente, per i protoni è:

$$(4h) \quad \psi_{0n} = \left(\frac{2A - 2Z}{A} \right)^{2/3} \psi_0; \quad \psi_{0p} = \left(\frac{2Z}{A} \right)^{2/3} \psi_0.$$

3. - Interazione dei nucleoni.

La relazione (5) è valida nell'ipotesi di un gas ideale. Per descrivere invece in modo più adeguato il comportamento del gas nucleonico terremo conto del fatto che le Z particelle cariche e gli $A - Z$ neutroni del nucleo di numero di massa A interagiscono fra di loro. Di queste interazioni trascureremo quelle di natura coulombiana dovute alla repulsione elettrostatica fra i protoni, in quanto la correzione sull'energia totale che esse comportano non è molto sensibile neppure per i nuclei pesanti ⁽¹⁰⁾.

⁽¹⁰⁾ R. D. PRESENT: *Phys. Rev.*, **60**, 28 (1941); E. FEENBERG: *Phys. Rev.*, **60**, 593 (1941).

L'interazione nucleare propriamente detta potrebbe essere introdotta come una perturbazione e trattata con gli usuali metodi variazionali in cui il raggio nucleare viene considerato come una quantità variabile. Noi tuttavia ci riferiremo ad un criterio diverso, sebbene sostanzialmente analogo e più adeguato al modello a gas di Fermi.

Se si tiene conto delle interazioni nucleari, lo stato di estrema degenerazione del gas non può essere descritto dicendo che tutti i livelli più bassi sono occupati, in quanto, a causa delle transizioni che esse producono fra i livelli

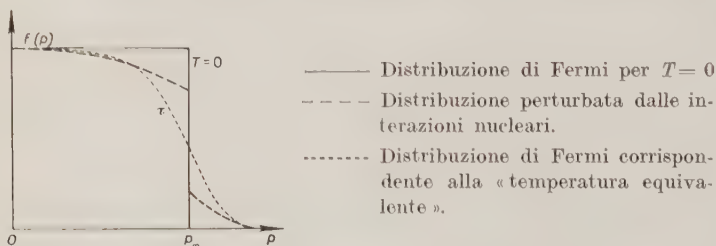


Fig. 1. — Distribuzione dei momenti in un nucleo pesante standard.

occupati e quelli non occupati, la distribuzione di Fermi viene distorta in un intorno di ψ_0 nel senso che nello spazio dei momenti la densità tende a diminuire per $p < \psi_0^2/2m$ e presenta una coda per $p > \psi_0^2/2m$ (fig. 1) ⁽¹¹⁾. Si può quindi pensare che l'effetto delle interazioni nucleari sia dovuto ad una specie di «agitazione termica» della materia nucleare; si prospetta in tale modo la possibilità di individuare per ogni temperatura effettiva T del nucleo alla quale, a causa delle interazioni nucleari, la distribuzione di Fermi è perturbata, una temperatura equivalente τ che caratterizzerebbe una distribuzione di Fermi relativa a particelle che non avessero interazione.

Eseguendo tutti i calcoli tenendo conto esclusivamente della temperatura equivalente e risalendo poi a quella effettiva secondo una determinata legge, si ha la possibilità di includere le interazioni nucleari nello studio del comportamento del gas senza introdurre alcun criterio fisico o accorgimento di calcolo estraneo alla statistica di Fermi.

Per far ciò è necessario stabilire anzitutto il legame che intercede fra la temperatura effettiva del nucleo e quella equivalente. A tale scopo, riguarderemo per le ragioni dette le relazioni (4; a, b) come dipendenti dalla temperatura equivalente τ ed essendo la ψ una funzione decrescente della temperatura equivalente τ alla quale la distribuzione di Fermi è realizzata, faremo l'ipo-

⁽¹¹⁾ L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (North-Holland Pub. Co., 1948).

tesi che tra le due temperature T e τ sussista la relazione

$$(6) \quad \tau = T + a\psi(\tau),$$

dove, secondo WATANABE ^(12,13), $a = 0.29$.

Allora, la (4c), interpretata come funzione di τ , diventa per $T = 0$

$$(7a) \quad \psi(\tau_0) = \left(\frac{A}{2C}\right)^{2/3} \mu^{-2/3}(a),$$

cioè

$$(7b) \quad \tau_0 = a\psi(\tau_0),$$

e quindi la relazione che sostituisce la (4c) risulta:

$$(7c) \quad U(\tau_0) = \frac{6C}{5} \left(\frac{A}{2C}\right)^{5/3} \mu^{-5/3}(a)r(a);$$

la differenza fra la (7c) e la (4c) dà l'energia latente di eccitazione nucleare dovuta alla equivalenza termica delle interazioni fra i nucleoni:

$$U' = \frac{6C}{5} \left(\frac{A}{2C}\right)^{5/3} \{\mu^{-5/3}(a)r(a) - 1\}.$$

È di immediata verifica che per ogni valore del parametro y , cui corrisponde una determinata temperatura equivalente, si trova la temperatura effettiva del nucleo tramite la relazione:

$$(7d) \quad T = (y - a) \left(\frac{A}{2C}\right)^{2/3} \mu^{-2/3}(y),$$

in cui $y > a$. Inoltre, fra temperatura equivalente, quella effettiva e il grado di degenerazione del gas esiste la relazione:

$$(7e) \quad \tau = T(1 + a \log \lambda)^{-1}.$$

Tenendo conto delle interazioni nucleari, la relazione (5) diviene per i neutroni e, rispettivamente, per le particelle cariche:

$$(8a) \quad E_{A+Z}(\tau) = \frac{3C}{5} \left(\frac{2A-2Z}{A}\right)^{5/3} [\mu^{-5/3}(y)r(y) - \mu^{-5/3}(a)r(a)],$$

$$(8b) \quad E_Z(\tau) = \frac{3C}{5} \left(\frac{2Z}{A}\right)^{5/3} [\mu^{-5/3}(y)r(y) - \mu^{-5/3}(a)r(a)],$$

⁽¹²⁾ S. WATANABE: *Zeits. f. Phys.*, **113**, 482 (1939).

⁽¹³⁾ H. EULER: *Zeits. f. Physik*, **105**, 553 (1937).

e quindi l'energia totale di eccitazione del gas nucleonico risulta

$$(10) \quad E_0 = E_{\text{tot}}(\tau) = E_{A-2}(\tau) + E_2(\tau).$$

La (9) è stata calcolata numericamente con grande approssimazione per diversi valori del numero di massa A profittando del fatto che i contributi agli integrali $\mu(y)$ e $\nu(y)$ sono del tutto trascurabili per $x \geq 30$ ed $y < 10^8$, a causa del massimo acuto della funzione $e^x(1+e^x)^{-2}$ in corrispondenza di $x=0$.

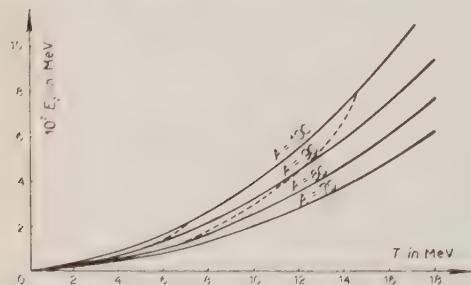


Fig. 2. - Curve energia-temperatura per nuclei di differente numero di massa. Le curve tratteggiate rappresentano la variazione di energia in funzione della temperatura nucleare durante il decorso del processo evaporativo iniziatosi con $E_0 = 800$ MeV e $E_0 = 200$ MeV.

Il risultato dei calcoli è rappresentato in fig. 2 in cui l'energia di eccitazione E_0 è stata posta in funzione della temperatura effettiva del nucleo tramite la (7d). Com'era da attendersi, a causa del fatto che le interazioni nucleari tendono a ridurre lo stato di degenerazione del gas nucleonico, le curve energia temperatura tendono a raccordarsi nella zona delle alte temperature

con quelle calcolabili per gas di media degenerazione con il metodo di Darwin-Fowler.

In base alla fig. 2 l'entropia del gas nucleonico è stata calcolata tramite la relazione

$$(10) \quad S(E) = \int_0^E \frac{dE}{T(E)}.$$

Il risultato dei calcoli è rappresentato in fig. 3.

4. - Evaporazioni nucleari.

Secondo la teoria dell'evaporazione di Weisskopf (¹), la probabilità che il nucleo eccitato al livello E_0 emetta una particella di massa m con energia cinetica compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$, è:

$$(11) \quad W(\varepsilon) d\varepsilon = \sigma_0 \frac{8\pi\gamma m}{h^2} \exp [S(E_0 - U - \varepsilon) - S(E_0)] \varepsilon d\varepsilon,$$

in cui γ rappresenta il fattore statistico di spin e U l'energia media di legame della particella del nucleo. Nella (11) abbiamo supposto costante la sezione d'urto σ_0 del processo inverso di quello descritto dalla (11) e ciò non comporta un serio errore sin tanto che l'energia della particella evaporata si aggira sui 25-30 MeV (rami neri).

L'energia cinetica media risulta

$$(12) \quad \bar{\varepsilon} = \int_0^{E_0 - U} \varepsilon W(\varepsilon) d\varepsilon / \int_0^{E_0 - U} W(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Per basse energie la maggior parte delle particelle emesse da un nucleo dopo la collisione sono relativamente lente; la distribuzione energetica delle particelle cariche ha un massimo che corrisponde approssimativamente all'altezza della barriera di potenziale, mentre le particelle neutre hanno una distribuzione maxwelliana con il massimo alla temperatura del nucleo.

La (11) è stata calcolata tramite i valori ricavati dalla (9) e dalla (10). A causa del massimo acuto presentato in uno stretto intorno di $E_0 - U$ dalle funzioni integrande $\varepsilon \exp [S(E_0 - U - \varepsilon)]$ e $\varepsilon^2 \exp [S(E_0 - U - K)]$ che compaiono nella (12), è facile verificare che l'energia cinetica media della s -esima particella evaporata è inversamente proporzionale al coefficiente angolare $k(E_0 - U)$ della curva energia-entropia calcolato in corrispondenza dell'energia posseduta dal nucleo che evapora tale particella:

$$(13a) \quad \bar{\varepsilon}_s = 2/k(E_{s-1} - U),$$

e, quindi, tenendo conto che $dS/dE = 1/T = k$, si ha

$$(13b) \quad \bar{\varepsilon}_s = 2T(E_{s-1} - U).$$

Detto

$$(14) \quad P_i = \frac{Z}{Z + N} \int_{U_i}^{E_0} W_i(\varepsilon) d\varepsilon, \quad P_N = \frac{N}{Z + N} \int_{U_N}^{E_0} W_N(\varepsilon) d\varepsilon,$$

la probabilità totale di emissione di una particella carica e, rispettivamente, di una particella neutra, l'energia media di legame che compare nella (12) è data da:

$$(15) \quad U = \bar{U}(E_0) = \frac{P_i}{P_i + P_N} U_i + \frac{P_N}{P_i + P_N} U_N = \Phi(E_0) U_i + \chi(E_0) U_N,$$

in cui U_i e U_n sono state ricavate dai dati di WEIZSÄCKER

$$U_n = 8 \text{ MeV}; \quad U_p = 14,2 \text{ MeV}; \quad U_a = 19,3 \text{ MeV},$$

e tenendo conto del fatto sperimentale che il rapporto fra i protoni e le altre particelle di carica unitaria (deutoni, tritoni) è $55/79 = 0,696$ ⁽¹⁴⁾. Abbiamo trascurato l'emissione di particelle alfa in quanto, se non si considera l'effetto tunnel, il rapporto P_a/P_N è molto piccolo rispetto a quello relativo a qualsiasi altra particella carica; questa semplificazione, che altera il rapporto tra i singoli tipi di particelle cariche, non incide che in maniera poco rilevante sul numero totale di particelle ionizzanti.

A causa del comportamento delle funzioni integrande che compaiono nella (14) e per ragioni analoghe a quelle precedentemente esposte, le P_i e P_N risultano inversamente proporzionali al quadrato del coefficiente angolare della curva energia-entropia calcolato nei punti $E_0 - U_i$ e $E_0 - U_N$. Tenendo conto della relazione $1/T = k$, l'energia media di legame della s -sima particella evaporata si ricava allora in modo ricorrente dalla (15) e si trova:

$$(16) \quad \bar{U}_s(E_0) = \frac{\lambda(s)T^2(E_{s-1} - U_i)U_i + \mu(s)T^2(E_{s-1} - U_N)U_N}{\lambda(s)T^2(E_{s-1} - U_i) + \mu(s)T^2(E_{s-1} - U_N)},$$

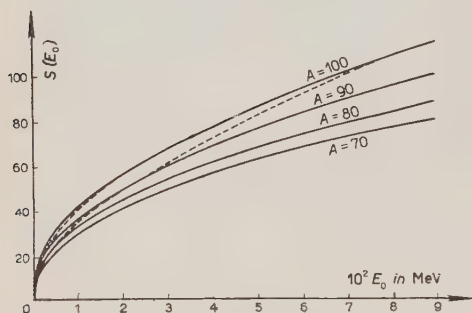


Fig. 3. - Curve entropia-energia per nuclei di differente numero di massa. Le curve tratteggiate rappresentano la variazione di entropia in funzione della energia di eccitazione del nucleo residuo durante il decorso del processo evaporativo iniziatosi per $E_0 = 800$ MeV e $E_0 = 200$ MeV.

in cui

$$(17) \quad \begin{cases} \lambda(s) = Z - (s-1)\Phi(E_{s-1}); \\ \mu(s) = N - (s-1)\chi(E_{s-1}). \end{cases}$$

Il calcolo numerico è stato eseguito seguendo le singole fasi del processo evaporativo. Fissato il numero di massa A e l'energia di eccitazione E_0 del nucleo, l'energia cinetica delle successive particelle emesse è stata valutata tramite la (12) e la (16). Nelle fig. 2 e 3 le curve tratteggiate rappresentano le variazioni dell'energia totale di eccitazione del nucleo e dell'entropia durante il processo evaporativo iniziato con energia di ec-

citazione di $E_0 = 800$ MeV e $E_0 = 200$ MeV. I calcoli sono stati eseguiti anche per valori di $E_0 = 400$ MeV e $E_0 = 600$ MeV. Nella fig. 4 sono rappresentate le energie cinetiche delle particelle evaporate in funzione dell'energia di eccitazione.

Le successioni numeriche delle perdite di energia del nucleo per particella evaporata $\eta_s = \varepsilon_s + U_s$ sono delle successioni aritmetiche di ordine superiore. Tenendo conto delle approssimazioni introdotte dal calcolo, esse possono ritenersi individuate da progressioni aritmetiche del terzo ordine; ciò sarebbe ancora più esatto qualora si fosse tenuto conto che il rapporto tra energia cinetica media acquistata dalla particella evaporata e l'energia totale a disposizione dipende oltre che dal modello assunto anche dalla forma $\sigma(E_0, \varepsilon)$ della sezione d'urto del processo inverso di quello descritto dalla (11), che noi abbiamo supposto costante, mentre invece è una funzione decrescente, al crescere dell'energia ε , come ε^{-1} , esclusa la zona delle basse energie dove interviene il principio di esclusione.

Nella tabella I sono indicate per le diverse energie di eccitazione le perdite energetiche del nucleo per evaporazione della prima particella e le differenze prime, secondo, terze e quarte delle relative successioni numeriche. Le differenze quarte sono state considerate nulle in quanto il loro ordine di grandezza è inapprezzabile nei nostri calcoli.

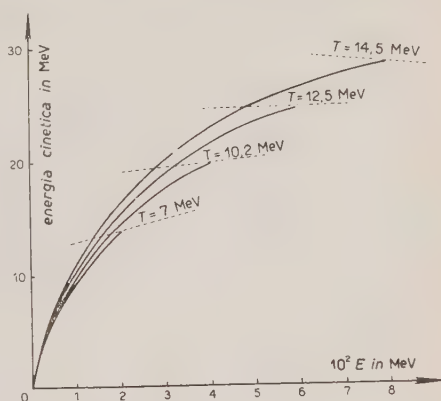


Fig. 4. - Energia cinetica media delle particelle espulse in funzione dell'energia di eccitazione per processi evaporativi iniziatisi con $E_0 = 800, 600, 400, 200$ MeV. Le linee tratteggiate rappresentano le isoterme relative alla temperatura vera del nucleo,

TABELLA I.

E_0 (MeV)	η_1	$\Delta\eta_1$	$\Delta^2\eta_1$	$\Delta^3\eta_1$	$\Delta^4\eta_1$	A	B	C	D
800	40.4980	-0.4177	-0.3158	-0.9049	~ 0	-0.0049	-0.0338	-4.8767	976.8674
600	36.3570	-0.4798	-0.0305	-0.0049	~ 0	-0.0049	-0.0926	-5.4555	878.1110
400	31.5250	0.6312	0.0550	-0.0049	~ 0	-0.0049	-0.1906	-6.9731	763.7686
200	25.5001	-1.0053	-0.0844	-0.0049	~ 0	-0.0049	-0.3082	11.1047	632.4278

Poichè la somma S delle perdite energetiche che subisce il nucleo nel processo evaporativo completo è:

$$S = \sum_{k=1}^N \eta_k = E_0 - U,$$

si ottiene immediatamente una formula di somma per una progressione aritmetica del terzo ordine

$$(18) \quad E_0 - U = \binom{N}{1} \eta_1 + \binom{N}{2} \Delta \eta_1 + \binom{N}{3} \Delta^2 \eta_1 + \binom{N}{4} \Delta^3 \eta_1,$$

e quindi

$$(19) \quad F(N) = AN^4 + BN^3 + CN^2 + DN - 24(E_0 - U) = 0.$$

I coefficienti A , B , C , D si calcolano mediante le seguenti relazioni

$$(20a) \quad \begin{cases} \Delta^m \eta_1 = \eta_{m+1} - m \eta_m + \binom{m}{2} \eta_{m-1} - \dots + (-1)^m \eta_1, \\ \eta_m = \eta_1 + m \Delta \eta_1 + \binom{m}{2} \Delta^2 \eta_1 + \dots + \Delta^m \eta_1, \end{cases}$$

e si trova

$$(20b) \quad \begin{cases} A = \Delta^3 \eta_1, & C = 12 \Delta \eta_1 - 12 \Delta^2 \eta_1 + 11 \Delta^3 \eta_1, \\ B = 4 \Delta^2 \eta_1 - 6 \Delta^3 \eta_1, & D = 24 \eta_1 - 12 \Delta \eta_1 + 8 \Delta^2 \eta_1 - 6 \Delta^3 \eta_1. \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione di quarto grado (19) è alquanto laboriosa e dalla formula risolutiva non è possibile ottenere una relazione semplice e sufficientemente approssimata tra il numero totale di particelle evaporate e l'energia di eccitazione del nucleo. Per trovare una relazione non molto complicata abbiamo risolto la (19) mediante il metodo di Newton-Fourier, assumendo come radice approssimata per eccesso $n = \sqrt{E_0}$ (*). Siccome le condizioni per la applicabilità di detto metodo sono verificate, una radice della (19) è data da:

$$(21) \quad N(E_0) = \sqrt{E_0} = \frac{F(\sqrt{E_0})}{F'(\sqrt{E_0})}.$$

La formula (21) ha però l'inconveniente di richiedere la conoscenza delle A , B , C , D che dipendono dall'energia di eccitazione termica del nucleo, come si può rilevare dalla tabella I. Per questa ragione abbiamo cercato di modificare la (21) confrontandola con la soluzione rigorosa della (19); abbiamo constatato che il rapporto $F(\sqrt{E_0})/F'(\sqrt{E_0})$ può esprimersi, a meno di qualche unità sulla seconda cifra decimale, tramite la relazione:

$$(22) \quad f(E)_0 = \frac{F(\sqrt{E_0})}{F'(\sqrt{E_0})} = \frac{UE_0^{1/2} - 0,26 E_0}{U + 0,77 E_0^{1/2}},$$

(*) Una relazione di questo tipo può ricavarsi dalla teoria di Weisskopf per nuclei pesanti aventi energia di eccitazione $E_0 = 100$ MeV (W. HEITLER: *Phys. Rev.*, **54**, 873 (1938)).

Tenendo conto della (14), il rapporto fra il numero delle particelle cariche e il numero totale di particelle evaporate in funzione dell'energia di eccitazione E_0 è dato da

$$(23) \quad \Phi(E_s) = \frac{\lambda(s)T^2(E_{s-1} - U_i)}{\lambda(s)T^2(E_{s-1} - U_i) + \mu(s)T^2(E_{s-1} - U_N)}.$$

Segue che il numero delle particelle ionizzanti evaporate da un nucleo eccitato al livello E_0 è:

$$(24) \quad N_i(E_0) = \Phi(E_0)\sqrt{E_0} - \Phi(E_0)f(E_0),$$

da cui si ottiene

$$(25) \quad q(E_0) \cdot N_i^2 + p(E_0)N_i - E_0 = 0,$$

essendo

$$(26) \quad \begin{cases} q(E_0) = \frac{E_0}{\Phi^2(E_0)[E_0 - f^2(E_0)]}; \\ p(E_0) = \frac{2E_0 \cdot f(E_0)}{\Phi(E_0)[E_0 - f^2(E_0)]}. \end{cases}$$

Le funzioni $f(E_0)$, $q(E_0)$, e $p(E_0)$ sono rappresentate in fig. 5.

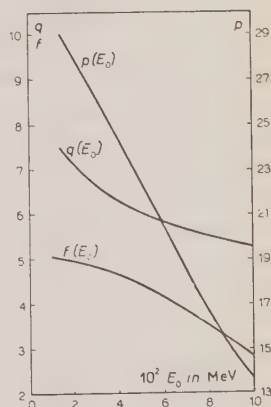


Fig. 5.

5. - Considerazioni sulla legge $E_0 = b \cdot T^2$.

Potrebbe essere utile, allo scopo di confrontare questa teoria con quella di Weisskopf ⁽¹⁵⁾, stabilire a quali conseguenze conduca l'espressione generale (9) quando si precisi la dipendenza tra energia di eccitazione E_0 e temperatura nucleare T mediante una legge del tipo:

$$(27a) \quad E_0 = bT^n.$$

Se si interpreta il nucleo come gas ideale totalmente degenere ($T = 0$), la (27a) con $n = 2$ è conseguenza diretta della statistica di Fermi e la costante b , legata alla struttura del nucleo dalla relazione

$$(27b) \quad b = \frac{4}{72^{1/3}} \frac{\pi^{8/3} V^{2/3} m}{h^2} [(A - Z)^{1/3} + Z^{1/3}],$$

assume, per $A = 100$ e $Z = 44$, il valore 11 MeV^{-1} . Tuttavia, questo valore

⁽¹⁵⁾ V. F. WEISSKOPF: *Lecture Series in Nuclear Physics* (U.S. Govt. Printing Office, Washington, D.C., 1947).

non rende conto in modo adeguato dei dati sperimentali i quali impongono, secondo WEISSKOPF, per b un valore compreso tra 5 e 20 MeV⁻¹.

Nel nostro caso, tenendo conto che l'effetto delle interazioni nucleari conduce ad una diminuzione dello stato di degenerazione del gas ⁽¹⁶⁾ nella (27a) tanto b quanto n devono intendersi variabili con E_0 . Per semplicità abbiamo considerato le due ipotesi estreme:

$$n = \text{cost.} \quad b = b(E_0); \quad b = \text{cost.} \quad n = n(E_0).$$

In entrambi i casi si trova che $b(E_0)$ e $n(E_0)$ sono funzioni decrescenti dell'energia di eccitazione. Da ciò segue che nelle formule da noi ricavate la temperatura effettiva del nucleo appare essere minore nella zona di Fermi di quella che si avrebbe applicando le formule di Weisskopf, fatto questo che è in accordo con le osservazioni sperimentali di GUGELOT ⁽¹⁷⁾. Più precisamente, assumendo una legge del tipo (27a) si trova che per $n = 2$ e $A = 100$ la funzione $b(E_0)$ varia da 9,9 MeV⁻¹ ($T = 0$) a 3,6 MeV⁻¹ ($T = 14,6$ MeV).

Ci sembra ancora interessante osservare che, tenendo conto della variabilità della massa durante il decorso del processo evaporativo iniziatosi, per esempio, con una energia di eccitazione termica $E_0 = 800$ MeV, $b(E_0)$ varia tra 3,6 MeV⁻¹ ($T = 14,6$ MeV) e 6,7 MeV⁻¹ ($T = 0$). La dipendenza di $b(E_0)$ dal numero di massa così calcolata conduce, anche in questo caso, a valori che nella zona di Fermi sono inclusi negli errori sperimentali di Gugelot.

La seconda ipotesi $b = \text{cost.} = 11$ MeV⁻¹ e $n = n(E_0)$ porta per un nucleo di massa 100 a valori di n variabili tra 1,96 ($T = 0$) e 1,66 ($T = 14,6$ MeV) (*).

6. — Confronto con i dati sperimentali e conclusioni.

La relazione (25), ricavata teoricamente, è stata confrontata con la formula empirica di Bristol ⁽¹⁸⁾

$$(28) \quad q \cdot N_i^2 + p N_i - E_0 = 0, \quad (q = 4; p = 37).$$

ottenuta in base all'analisi di una selezione di stelle prevalentemente di tipo 0_n . Il numero medio di rami ionizzanti di natura evaporativa in funzione

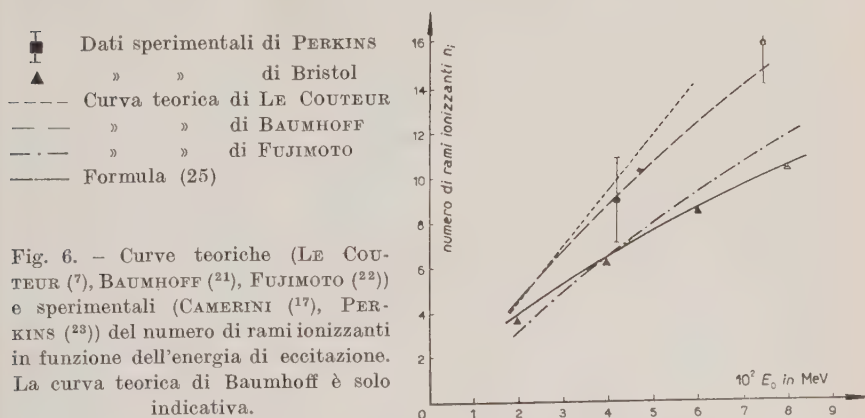
⁽¹⁶⁾ J. BARDEEN: *Phys. Rev.*, **51**, 799 (1937).

⁽¹⁷⁾ P. C. GUGELOT: *Phys. Rev.*, **81**, 51 (1951).

(*) Le funzioni $a(E_0)$ e $n(E_0)$ decrescenti per valori dell'energia di eccitazione corrispondenti a $y \geq 0,1$ ($n = 2$) sono state approssimate con una costante nella zona di Fermi ($y < 0,1$).

⁽¹⁸⁾ U. CAMERINI, J. H. DAVIES, P. H. FOWLER, C. FRANZINETTI, W. O. LOCK, O. H. PERKINS e G. YEKUTIELY: *Phil. Mag.*, **42**, 1241 (1951).

dell'energia di eccitazione termica del nucleo è in soddisfacente accordo con i dati sperimentali (fig. 6).



Nella fig. 7 (*a, b, c*) sono confrontati con i nostri (curva 2) gli spettri calcolati da LE COUTEUR (curva 1) delle particelle espulse dal nucleo avente energia di eccitazione $E_0 = 250, 450, 650$ MeV. Com'era da attendersi, le distribuzioni calcolate in base ai criteri sui quali è fondata la presente trattazione si discostano sensibilmente da quelle previste da LE COUTEUR e mostrano come l'aumento dell'energia cinetica media dia luogo ad un maggior numero di particelle espulse dal nucleo con elevata energia cinetica. Segue da ciò che gli spettri calcolati secondo la relazione (25) includono anche una parte delle tracce generalmente considerate come grige e precisamente quelle dovute a particelle il cui potere ionizzante specifico si aggira intorno a 4-5 volte il minimo.

Nella fig. 8 sono riportati i dati sperimentali di G. BERNARDINI (19) e L. GERMAIN (20) ottenuti con protoni di 350-400 MeV su emulsioni Ilford G5

Valutando con BERNARDINI l'effetto della trasparenza nucleare e tenendo conto che i nostri spettri per energie di eccitazione del nucleo inferiori a 180-200 MeV si estendono sino a circa 30-35 MeV, abbiamo considerato solamente quelle tracce di BERNARDINI che si riferiscono a particelle la cui energia cinetica non supera questo limite. Ci è stato così possibile risalire dai dati

(19) G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e S. J. LINDENBAUM: *Phys. Rev.*, **80** 905 (1950).

(20) L. GERMAIN: *Phys. Rev.*, **82**, 596 (1951).

(21) L. BAUMHOFF e W. HORNING: *Phys. Rev.*, **75**, 370 (1948).

(22) G. BERNARDINI, E. T. BOOTH, S. J. LINDENBAUM: *Phys. Rev.*, **83**, 669 (1951).

(23) J. FUJIMOTO e J. YAMAGUCHI: *Prog. Theor. Phys.*, **5**, 787 (1950).

sperimentali di questo Autore al numero medio di particelle che possono ritenersi, secondo la presente descrizione, di natura evaporativa e quindi risalire all'energia di eccitazione termica del nucleo. Risolvendo l'equazione (25), dopo

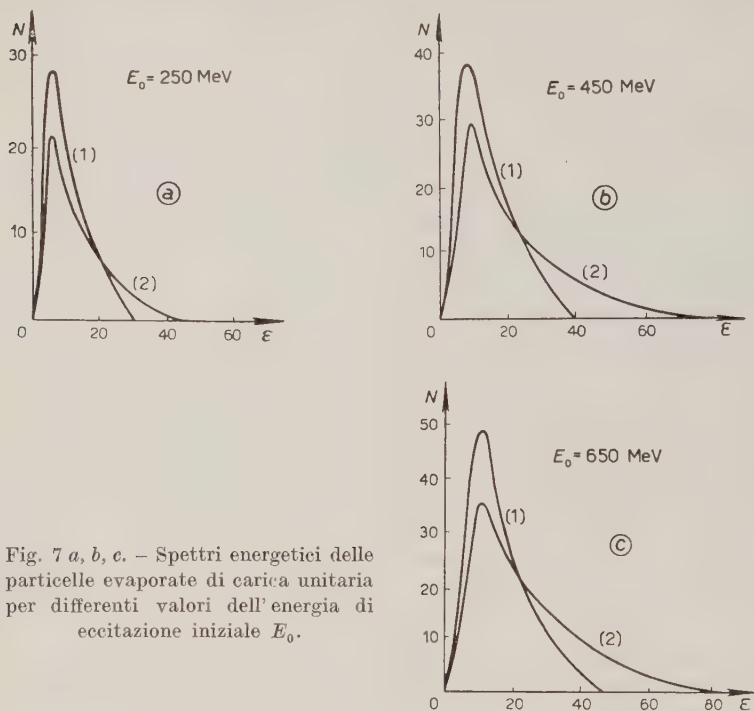


Fig. 7 *a, b, c.* — Spettri energetici delle particelle evaporate di carica unitaria per differenti valori dell'energia di eccitazione iniziale E_0 .

aver posto il valore trovato $\bar{N}_i = 2,8$, si ottiene che in stelle prodotte da protoni di 350-400 MeV l'energia spesa nel solo processo evaporativo si aggira intorno ai 110-120 MeV.

Per accertare la legittimità del valor medio $\bar{N}_i = 2,8$ abbiamo calcolato sulla base di esso il numero di stelle in funzione del numero di rami supponendo valida la legge:

$$(29) \quad P(\bar{N}_i, N, m) = P(\bar{N}_i, N) \prod_k \frac{m-k+1}{m-k},$$

in cui $P(N_i, N)$ è la formula di Poisson. Il fattore correttivo \prod_k tiene conto del numero limitato m di osservazioni e tende ad aumentare il numero di stelle con pochi rami ed a ridurre quelle con molti. Risultati analoghi si ottengono

con i dati di L. GERMAIN supponendo che la distribuzione energetica delle particelle emesse sia la stessa di quella data da BERNARDINI.

Il valore trovato $E_0 = 110 \pm 120$ MeV, pur tenendo conto delle notevoli estrapolazioni nella stima del numero di particelle incluse nell'intervallo energetico considerato, non sembra essere del tutto in contrasto con le recenti previsioni teoriche di BERNARDINI e coll. ⁽²²⁾, qualora si osservi che esse sono basate sull'ipotesi che le sezioni d'urto differenziali nucleone-nucleone nel centro di massa siano costanti e che sia lecito trascurare il coefficiente di riflessione della barriera nucleare. Inoltre è pensabile che la stessa adozione del modello di Goldberger favorisca troppo, in quanto trascura le transizioni tra stati occupati e non occupati prodotte dalle interazioni nucleari fra i nucleoni che costituiscono il nucleo a gas degenere di Fermi, quei processi che comportano una espulsione di particelle per urto diretto dei nucleoni primari e secondari rispetto a quelli che coinvolgono piccoli trasferimenti di energia e che danno luogo al processo evaporativo.

In conclusione, il quadro prospettato sembra nelle sue linee essenziali abbastanza soddisfacente, in quanto non solo interpreta in modo corretto i dati sperimentali del gruppo di Bristol, ma permette anche, poichè la (25) prevede un numero di rami ionizzanti di natura evaporativa minore di quello ottenuto da altri Autori ⁽⁷⁾ ⁽²¹⁾ ⁽²²⁾, di considerare come coesistenti i due processi: a) collisione diretta o indiretta, b) eccitazione ed evaporazione che danno origine alle stelle.

Ci è gradito ringraziare i proff. N. DALLAPORTA, E. CLEMENTEL e G. PUPPI per le utili discussioni e per l'interessamento con cui hanno seguito questo lavoro e la dott. S. CHERSI che ci ha coadiuvato nell'esecuzione dei calcoli numerici.

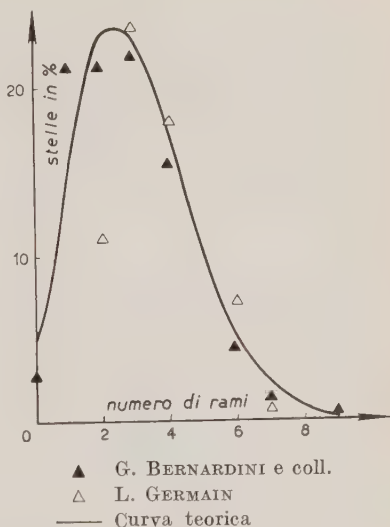


Fig. 8. - Distribuzione teorica ($\bar{N}_i = 2,8$) e dati sperimentali di G. BERNARDINI e L. GERMAIN ottenuti con protoni di 350-400 MeV.

⁽²⁴⁾ D. H. PERKINS: *Phil. Mag.*, **41**, 138 (1950).

⁽²⁵⁾ D. H. PERKINS, J. B. HARDING e S. LATTIMORE: *Proc. Roy. Soc.*, **196**, 325 (1949).

SUMMARY

The Fermi gas model has been extended to high nuclear temperatures according to a mathematical procedure independent of the restrictive condition $\tau/\psi \ll 1$. The modification of the momentum distribution brought about by the nuclear interactions (Fig. 1) has been considered qualitatively of the same kind as that due to thermal agitation. Calculations have been carried out on the basis of the «nuclear equivalent temperature» τ at which the nucleon gas, having a true temperature T , may be considered as an ideal one. The relation between true and equivalent temperature has been assumed of the form

$$(6) \quad \tau = T + a\psi(\tau),$$

where $a = 0.29$ is the Watanabe parameter and $\psi(\tau)$ is the Fermi function characteristic for highly degenerated gases. The total excitation energy versus true nuclear temperature T is represented in Fig. 2. On the basis of this curve and following Weisskopf's theory, the evaporation process, initiated by a nucleus of energy E_0 , has been studied stage by stage taking into account the diminution of the nuclear temperature and the variation of the atomic mass number. It has been found that the nuclear energy losses can be well represented by a third order difference relation. The energy summation formula thus derived leads to a fourth degree equation, the solution of which gives the total number of particles evaporated from a nucleus of initial energy E_0 (Eq. (22)). On evaluating the ratio $\Phi(E_0)$ between the number of charged particles and the total number $N(E_0)$ of them as a function of the excitation energy of the residual nucleus, one obtains from (Eq. (22)) the number of ionizing particles evaporated from a nucleus of energy E_0 :

$$(25) \quad q(E_0)N_i^2 + p(E_0)N_i - E_0 = 0,$$

where the functions $q(E_0)$ e $p(E_0)$ (Eq. (26)) are represented in Fig. 5. Since the mean kinetic energy evaluated by means of the energy-temperature curves is sensibly larger than that obtained by other Authors, the formula (25) includes black and also some grey prongs, as it is shown by the distribution curves (Fig. 7 *a, b, c*). Therefore, it may be compared with the Bristol experimental relation $qN_i^2 + pN_i - E_0 = 0$, where $q = 4$ and $p = 37$; it is seen that the theoretical previsions are well fitted with experimental data (Fig. 6). Fluctuations have been calculated with the Poisson formula. The curve represented in Fig. 8, which is in satisfactory accordance with Bernardini's experimental evidence, corresponds to $N_i = 2.8$. It is therefore possible to determine by the aid of Eq. (25) the energy lost in the evaporation process, which is found to be 110-120 MeV. This value seems to be not entirely contradictory with theoretical previsions of Bernardini especially if one considers that the Goldberger model assumed by him is based on an unperturbed Fermi distribution. Furthermore, it is believed that the evaporation processes are somewhat underestimated by this Author because he considers as constant the nucleon-nucleon differential cross-section in the c.m. and neglects the reflexion coefficient of the nuclear barrier.

Spettro dei mesoni μ al livello del mare.

D. BRINI e O. RIMONDI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

I. FILOSOFO

Istituto di Fisica dell'Università, Centro per lo studio degli Ioni veloci del C.N.R. - Padova

(ricevuto il 12 Aprile 1952)

Riassunto. — È stato determinato lo spettro differenziale in range dei mesoni μ al livello del mare fra 1 e 3,5 GeV/c allo scopo di mettere in evidenza una supposta anomalia di questo. Dai risultati ottenuti si conclude che in questo intervallo di energie non vi sono irregolarità superiori a qualche per cento.

1. — Esperienze effettuate in camera di Wilson da BLACKETT ⁽¹⁾ e da GLASER ⁽²⁾ hanno indicato la possibilità che sussista una anomalia dello spettro differenziale «in momento» delle particelle cariche, al livello del mare. Questi Autori hanno trovato infatti che tale spettro differenziale presenta un secondo massimo tra 2 e 4 GeV/c con uno scarto di circa il 20% rispetto all'andamento medio deducibile dagli spettri integrali «in range» dei mesoni μ . Per quanto l'anomalia riscontrata non sia molto significativa a causa degli errori statistici di quelle misure, ci siamo tuttavia proposti di stabilire se essa si ritrova anche in uno spettro differenziale in range. A questo scopo abbiamo realizzato un dispositivo che permette di determinare, per mezzo di assorbitori, sia lo spettro integrale che quello differenziale; questo ultimo mediante misure su bande energetiche anche più strette di quelle scelte dagli Autori citati. Le misure sono state estese fino a 3,5 GeV/c e sono durate un tempo sufficiente ad assicurare, per ogni punto sperimentale, un errore non superiore al 3%.

⁽¹⁾ P. M. S. BLACKETT: *Proc. Roy. Soc.*, A **159**, 1 (1937).

⁽²⁾ D. A. GLASER, B. HAMERMESH e G. SAFONOV: *Phys. Rev.*, **80**, 625 (1950).

Operando con questi criteri pensiamo di esserci posti in condizioni favorevoli per mettere in evidenza una eventuale anomalia dello spettro, anche se poco rilevante o contenuta in uno stretto intervallo energetico.

2. - Il dispositivo sperimentale da noi usato si compone di due sistemi identici, spostati l'uno rispetto all'altro, verticalmente, di 20 cm, ciascuno dei quali dà misure integrali e differenziali. L'insieme è schematizzato in fig. 1;

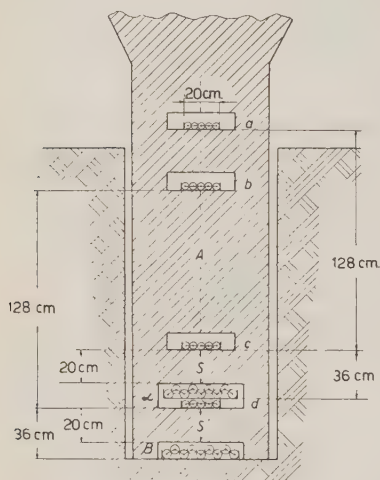


Fig. 1. - Dispositivo sperimentale.

i piatti di contatori abc costituiscono il primo sistema e i piatti $bed\beta$ il secondo. Tra i contatori e al disopra di essi sono posti gli assorbitori di ferro S , S' ed A ; S ed S' hanno lo spessore fisso di circa 20 cm, mentre lo spessore di A è stato variato durante le misure, tra 80 e 300 cm. La frequenza degli eventi registrati dalle coincidenze tra i contatori a , b e c , per i diversi spessori di A , ci dà la misura integrale; le stesse coincidenze abc che non sono anticoincise dai contatori α rappresentano il numero di particelle con un range compreso tra A e $A + S$ e danno quindi la misura differenziale. La larghezza della banda energetica è definita dallo spessore dell'assorbitore S e comprende tutti i mesoni con un momento residuo inferiore a 300 MeV/c. Ciò corrisponde ad una

banda, all'ingresso nell'assorbitore A , di circa 250 MeV/c per la zona dello spettro studiata. Analoghe misure integrali e differenziali sono date dal secondo sistema di contatori nel quale l'assorbitore che stabilisce il taglio per la misura integrale è rappresentato da $A + S$, mentre la misura differenziale è data dai mesoni che muoiono tra $A + S$ ed $A + S + S'$. I contatori dei piatti a , b , c e d hanno le dimensioni di cm 4×20 , mentre quelli delle anticoincidenze α e β sono di cm 5×40 ; con la disposizione geometrica da noi adottata si ha per entrambi i telescopi un angolo solido di $\cong 2,3 \cdot 10^{-2}$ steradiani. Il potere risolutivo del circuito di coincidenza era di 10^{-5} s e l'efficienza delle anticoincidenze del 99,8%. Per ragioni di stabilità e per una migliore schermatura dagli sciami laterali, il dispositivo era collocato in un pozzo appositamente costruito nei sotterranei dell'Istituto di Fisica di Bologna.

3. - Le misure sono state fatte aumentando lo spessore dell'assorbitore A da 80 cm fino al massimo di 300 cm e diminuendolo successivamente fino a

ritornare al valore iniziale. Il buon accordo tra i valori ottenuti in queste due fasi della misura da entrambi i dispositivi ci ha permesso di concludere la non esistenza di derive sistematiche strumentali.

Per avere un controllo continuo del regolare funzionamento dei due dispositivi lo spessore di A è stato variato sempre di 10 o 20 cm per volta; tenendo presente lo spessore di S e di S' si vede che, in tal modo, i due dispositivi dànno, sia per lo spettro integrale che per quello differenziale, delle serie di punti sperimentali direttamente confrontabili; l'accordo tra i valori ottenuti dai due dispositivi è risultato sempre ottimo e le misure sono state quindi sommate migliorandone la precisione statistica.

Abbiamo voluto anche stabilire l'influenza che avrebbe potuto avere lo scattering multiplo nell'assorbitore sulla sensibilità della misura differenziale. Il calcolo della distribuzione gaussiana dell'angolo di scattering multiplo all'entrata dello strato S o S' di fine range, nell'ipotesi di $v/c \ll 1$, si può effettuare ⁽³⁾ con la:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{E_N^2}{X_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{E^2} = \frac{E_N^2}{X_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(E_0 - \gamma x)^2} = \frac{E_N^2}{X_0} \left(\frac{1}{E_0 - \gamma x_2} - \frac{1}{E_0 - \gamma x_1} \right),$$

TABELLA I.

g/cm ² Fe	g/cm ² aria	GeV/c	Media oraria
390	320	0,72	173,0 \pm 1,7
520	420	0,92	155,0 \pm 1,6
650	520	1,11	143,6 \pm 1,5
780	620	1,35	130,9 \pm 0,84
910	720	1,57	121,6 \pm 0,94
1 040	820	1,80	113,7 \pm 0,8
1 170	920	2,05	103,8 \pm 0,7
1 300	1 030	2,30	96,5 \pm 0,6
1 430	1 130	2,55	89,2 \pm 0,6
1 495	1 180	2,7	88,9 \pm 0,8
1 560	1 230	2,8	84,0 \pm 0,8
1 625	1 280	2,9	82,8 \pm 0,7
1 693	1 330	3	79,4 \pm 0,4
1 745	1 370	3,15	77,5 \pm 0,5
1 797	1 410	3,21	75,2 \pm 0,4
1 849	1 450	3,30	72,8 \pm 0,6
1 901	1 490	3,40	70,8 \pm 0,6

TABELLA II.

g/cm ² Fe	g/cm ² aria	GeV/c	Media oraria
585	470	1	13,3 \pm 0,6
715	570	1,23	11,2 \pm 0,3
845	670	1,45	10,5 \pm 0,2
975	770	1,67	9,66 \pm 0,2
1 105	870	1,90	8,27 \pm 0,17
1 235	970	2,18	7,61 \pm 0,17
1 365	1 080	2,45	6,93 \pm 0,14
1 495	1 180	2,68	6,23 \pm 0,11
1 560	1 230	2,80	5,98 \pm 0,14
1 625	1 280	2,93	5,68 \pm 0,11
1 690	1 330	3,03	5,29 \pm 0,14
1 755	1 380	3,08	5,10 \pm 0,09
1 810	1 420	3,12	4,83 \pm 0,11
1 862	1 460	3,17	4,67 \pm 0,11
1 914	1 500	3,42	4,75 \pm 0,14
1 965	1 540	3,54	4,45 \pm 0,14

⁽³⁾ B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 264 (1941).

dove $E_s = 21$ MeV; $X_0 = 14,4$ g/cm² è il cammino di radiazione nel ferro; $E_0 - \gamma x_1$ ed $E_0 - \gamma x_2$ sono l'energia rispettivamente all'entrata e all'uscita dell'assorbitore A , nell'ipotesi che la perdita γ di energia per g/cm² sia costante.

Per mesoni di energia 0,9 GeV e 3,2 GeV (estremi della parte dello spettro da noi esplorata) e per una energia finale di 0,22 GeV, che rappresenta la larghezza a fine range della banda energetica da noi scelta per la misura differenziale, si ottiene:

$$\theta_{3,2} \leq 15^\circ \quad \text{e} \quad \theta_{0,9} \leq 13^\circ.$$

Considerando il valore di questi angoli si conclude che la diffusione della banda, per effetto dello scattering multiplo, si mantiene di entità modesta rispetto alla larghezza della banda stessa e perciò lo scattering non pregiudica la sensibilità della misura agli effetti della rivelazione di una anomalia che

dovrebbe occupare una regione dello spettro che è circa quattro volte la larghezza della banda medesima.

Le tabelle I e II riportano le frequenze rispettivamente della misura integrale e di quella differenziale.

Per il passaggio dai g/cm² di ferro impiegato nelle varie misure a quelli equivalenti di aria è stato usato il nomogramma di Wick ⁽⁴⁾ e per il successivo passaggio ai momenti ci siamo serviti delle curve di Princeton ⁽⁵⁾. I risultati riportati dalle tabelle sono già corretti dal fondo di casuali e di sciami e dal contributo, alle misure differenziali, della inefficienza delle anticoincidenze;

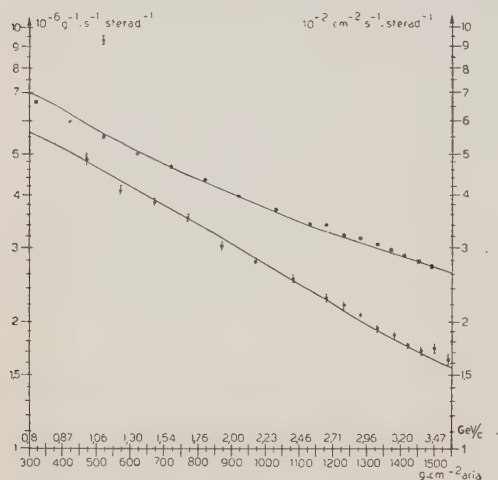


Fig. 2. - \odot Spettro differenziale di range.

\blacksquare Spettro integrale di range.

Le linee a tratto continuo sono le curve di Rossi.

queste correzioni sono state valutate sperimentalmente per vari punti dell'intervallo energetico studiato.

Altra correzione da apportare alle misure avrebbe potuto essere quella relativa all'effetto barometrico. Il coefficiente barometrico, assegnato per la radiazione totale incidente, diminuisce certamente al crescere del taglio sullo

⁽⁴⁾ G. C. WICK: *Nuovo Cimento*, **1**, 312 (1943).

⁽⁵⁾ J. X. MONTGOMERY: *Cosmic Ray Physics* (Princeton 1949), p. 354.

spettro; calcolare l'effetto barometrico assumendo per tutto lo spettro un coefficiente costante uguale a quello di DUPERIER⁽⁶⁾ porta quindi a sopravvalutare la correzione per l'intervallo energetico nel quale si sospetta l'anomalia. Per le variazioni di pressione atmosferica registrate nel corso delle nostre misure, le correzioni, pur assumendo un tale coefficiente costante, erano ampiamente contenute negli errori statistici e perciò non abbiamo creduto opportuno, ai fini di questo lavoro, di tenerne conto.

La fig. 2 mostra l'andamento che hanno i nostri punti sperimentali normalizzati sulle curve di Rossi.

4. — Dopo quanto è stato esposto nei precedenti numeri è facile concludere che una anomalia nello spettro differenziale dell'ordine del 10% non avrebbe potuto sfuggire. A conclusione di questo lavoro possiamo quindi dire che non esistono anomalie nello spettro differenziale in range dei mesoni μ al livello del mare nell'intervallo di momenti da 1 a 3,5 GeV/c di entità superiore a qualche per cento. Resta sempre aperta la possibilità che esistano irregolarità più modeste che non riguardano però i fini della presente ricerca.

Vi è tuttavia un punto che bisogna chiarire: la possibile anomalia citata all'inizio, supposto pure che abbia consistenza nei riguardi della precisione statistica delle misure, è emersa in uno spettro in momento della radiazione carica al livello del mare in camera di Wilson, in campo magnetico; il presente è invece uno spettro in range ottenuto per assorbimento, del quale possiamo con certezza affermare che esso riguarda esclusivamente mesoni μ che sono le uniche particelle le quali, a causa della debolissima interazione nucleare, sopravvivono sotto notevoli spessori di assorbitori. Anche nello spettro in momento, determinato in campo magnetico, è abbastanza plausibile, per quanto si sa attualmente sulla radiazione cosmica nell'atmosfera⁽⁷⁾, che siano presenti essenzialmente solo mesoni μ , giacchè le componenti assorbite rapidamente per interazione nucleare possono ammontare globalmente soltanto a qualche per cento del totale delle particelle penetranti. Pur non potendo escludere un intervento di queste componenti, sembra piuttosto improbabile di potere imputare ad esse l'anomalia in discorso, che resterebbe quindi, in base alla nostra esperienza, da escludere.

5. — Questa ricerca è stata fatta nell'Istituto di Fisica dell'Università di Bologna, al Direttore del quale, prof. G. VALLE, porgiamo i nostri vivi ringraziamenti per i mezzi largamente messi a disposizione. Egualmente vivi ringraziamenti porgiamo al prof. A. ROSTAGNI, Direttore dell'Istituto di Fisica del-

⁽⁶⁾ L. JÁNOSSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1948), p. 195.

⁽⁷⁾ G. PUPPI e N. DALLAPORTA: *Progress in cosmic rays physics* (Amsterdam, 1952), p. 315.

l'Università di Padova, che in tutti i modi ha appoggiato e facilitato la nostra collaborazione. Al prof. G. PUPPI, che ci ha suggerito l'esperienza e ci è stato largo di preziosi incitamenti e consigli durante la sua esecuzione, rivolgiamo l'espressione della nostra più viva riconoscenza. Porgiamo infine i nostri sinceri ringraziamenti all'Amministrazione Comunale di Bologna per l'aiuto prestato, all'ing. L'ABBATE della SABIEM e all'ing. BARCELLONI CORTI della TIMO per il materiale messo a disposizione.

SUMMARY (*)

The range differential spectrum of mesons μ has been determined at sea level between 1 and 3,5 GeV/c in order to gain evidence of an anomaly it is supposed to present. From the results obtained Authors conclude that in this energy interval there are no irregularities greater than some percent.

(*) *Editor's translation.*

Misura della concentrazione in deuterio dell'acqua di condensa di un soffione boracifero di Larderello.

E. CERRAI, C. MARCHETTI e M. SILVESTRI

Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 21 Aprile 1952)

Riassunto. — Mediante il metodo del galleggiante e con un prearricchimento noto, è stata confrontata la concentrazione in D_2O dell'acqua di condensa di un soffione di Larderello, con quella dell'acqua di rubinetto di Milano. Le due concentrazioni risultano eguali, entro qualche per cento.

1. — La concentrazione in deuterio dell'acqua naturale (espressa in concentrazione molare di D_2O) è di circa 0,015%; variabile leggermente a seconda della provenienza dell'acqua ⁽¹⁾. Abbiamo assunto che l'acqua di rubinetto di Milano abbia concentrazione in D_2O pari a quella indicata e ci siamo proposti di confrontare con essa la concentrazione di D_2O dell'acqua di condensa in un soffione boracifero della zona di Larderello (Toscana).

Per la misura della concentrazione in deuterio dei campioni siamo ricorsi ad un metodo densimetrico molto noto, quello del galleggiante, nella variante suggerita da SAPIRSTEIN ⁽²⁾, utilizzato come metodo assoluto ⁽³⁾. Questo consiste nella determinazione della temperatura t_0 a cui un galleggiante di vetro di opportune dimensioni si stacca dal fondo di una piccola ampolla contenente acqua naturale distillata, o comunque ad una concentrazione isotopica nota, e nella successiva determinazione della temperatura t a cui si distacca lo stesso galleggiante quando l'ampolla contiene l'acqua a concentrazione ignota. Questa

⁽¹⁾ I. KIRSCHENBAUM: *Physical properties and analysis of heavy water* (New York, 1951), p. 398.

⁽²⁾ L. A. SAPIRSTEIN: *Journ. Lab. Clin. Med.*, **35**, 793 (1950).

⁽³⁾ E. CERRAI, C. MARCHETTI e M. SILVESTRI: *Nuovo Cimento*, **9**, 530 (1952).

concentrazione per un dato galleggiante (cioè per un dato t_0) è funzione della grandezza $t - t_0(\Delta t_0)$. La sensibilità di questo metodo con l'apparecchiatura da noi usata si aggira intorno ad $1/2\,0000$ in concentrazione molare di D_2O nell' H_2O , operando con volumi di liquido pari a circa 2 cm^3 .

2. - Di solito ogni campione di acqua, sia naturale che arricchita, viene sottoposto ad una purificazione che consiste in una neutralizzazione con sostanze non contenenti acqua o idrogeno, quando occorre, ed inoltre ad un trattamento con pochi mg di $KMnO_4$. Questo è seguito da tre distillazioni sotto vuoto, dopo di che si può procedere alla misura usando un piccolo bagno termostatico corredato da un termometro al decimo di grado, letto mediante un cannocchiale. In questo caso però, dovendosi trattare un'acqua che contiene fra l'altro CO_2 , H_2S ed NH_3 disciolti, si è proceduto ad una purificazione particolare. La CO_2 non costituisce una preoccupazione in quanto per semplice degasaggio è facilmente eliminabile, mentre gli altri due composti, se non bene eliminati, in seguito ad ossidazione dell' H_2S avrebbero potuto fornire piccole quantità di $(NH_4)_2SO_4$ a scapito della purezza del campione, e quindi della precisione della misura. Tutta l'acqua di condensa da noi usata per la misura è stata perciò trattata nel seguente modo: addizionata con carbonato, anidro e secco, di sodio e potassio e permanganato potassico, pure secco, per spostare la maggior parte dell'ammoniaca ed ossidare i solfuri, è stata bollita all'aria per alcuni minuti. Quindi per neutralizzare l'alcalinità e l'ammoniaca residua è stata addizionata con pochi cristalli di piro-solfato sodico secco fino a reazione leggermente acida. Poi per eliminare i sali disciolti il tutto è stato accuratamente distillato a pressione normale. Un campione di acqua così ottenuto è stato sottoposto alle solite tre distillazioni sotto vuoto e quindi alla misura col metodo prima descritto.

3. - Poichè, come abbiamo detto, la precisione del metodo è di circa $1/20\,000$ in concentrazione molare, e noi dovevamo misurare dei valori nell'intorno di $1,5/10\,000$ (concentrazione naturale) abbiamo eseguito una misura preliminare usando anzichè un termometro al decimo di grado, un termometro di Beckmann al centesimo in modo che fosse apprezzabile qualche millesimo di grado.

La misura preliminare ha dato il seguente risultato:

a) *Acqua naturale*. - Lettura per tre volte di seguito sul termometro Beckmann della temperatura t_0 , a cui il galleggiante si distacca dal fondo dell'ampolla che contiene il campione di acqua naturale:

$$t_0 = t_B + 0,460\text{ }^\circ\text{C}; \quad t_0 = t_B + 0,455\text{ }^\circ\text{C}; \quad t_0 = t_B + 0,455\text{ }^\circ\text{C};$$

mediando si ha:

$$\bar{t}_0 = t_B + 0,457^\circ\text{C}.$$

b) *Acqua Larderello*. — Lettura per due volte di seguito sul termometro Beckmann della temperatura t a cui il galleggiante si distacca dal fondo dell'ampolla che contiene il campione di acqua in esame:

$$t = t_B + 0,457^\circ\text{C}; \quad t = t_B + 0,459^\circ\text{C};$$

mediando si ha:

$$\bar{t} = t_B + 0,458^\circ\text{C}.$$

$$\Delta t = \bar{t} - \bar{t}_0 = 0,001^\circ\text{C}.$$

Questa misura non rivela alcuna differenza apprezzabile fra le concentrazioni isotopiche delle due acque. Il metodo, infatti, per ogni differenza nelle concentrazioni pari all'1% fornisce un valore di Δt ch'è intorno a 3 o 3,5 °C. In tal modo, tenendo conto di tutte le possibili cause di errore, di fronte alle quali la precisione di lettura della temperatura mediante il Beckmann diviene sovrabbondante, si può raggiungere una sensibilità di poco superiore ai valori stessi delle concentrazioni che vengono misurate. Per questa ragione siamo ricorsi ad un metodo che amplificasse le eventuali differenze non rivelate da questa misura. Il metodo consiste semplicemente nel far subire un certo arricchimento isotopico ai campioni da confrontare, facendo loro subire una determinata elettrolisi.

4. — L'arricchimento dei campioni viene effettuato in una celletta verticale in acciaio inossidabile con elettrodi cilindrici coassiali, di cui quello interno è raffreddato ad acqua corrente (fig. 1). Si usano soluzioni alcalinizzate con quantità note di KOH e si pesa il quantitativo iniziale e finale di ogni elettrolisi. Si opera su quantità pari a circa 100 g che vengono ridotti di 15 o 20 volte a corrente costante ed in modo che sia minimo lo schiumeggiamento e nullo il trasporto di elettrolito nei gas.

Si sono eseguiti in tempi successivi, nell'ordine i seguenti arricchimenti:

a) g 100,04 di acqua naturale con aggiunta di g 1,39 di KOH sono stati elettrolizzati fino a g 7,5 di acqua arricchita.

b) g 100,00 di acqua Larderello con aggiunta di g 1,39 di KOH sono stati elettrolizzati fino a g 5,72 di acqua arricchita.

c) g 100,00 di acqua naturale con aggiunta di 1,39 g di KOH sono stati elettrolizzati fino a g 6,40 di acqua arricchita.

Il tutto è avvenuto con una corrente costante di $4 \pm 0,2$ A ed alla temperatura di $16 \pm 0,5$ °C.

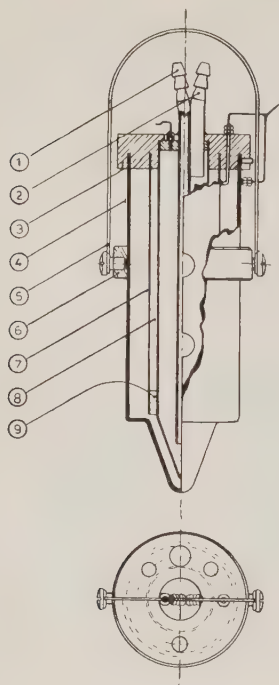


Fig. 1.

1. Tubo ingresso acqua raffreddata (Mat. ottone) $\varnothing 6 \times 3$.
2. Tubo uscita acqua raffreddata (Mat. ottone) $\varnothing 6 \times 3$.
3. Coperchio in plexiglas (Mat. plexiglas) $\varnothing 58$, spess. 15 mm.
4. Elettrodo esterno ausiliario (Mat. acc. Inox) $\varnothing 49 \times 45$.
5. Tondino di sospensione dell'insieme (Mat. acciaio trafilato) filo $\varnothing 1,5$.
6. Fascia per la sospensione dell'insieme (Mat. acciaio dolce) $\varnothing 60 \times 50$.
7. Elettrodo intermedio (Mat. acciaio Inox) $\varnothing 30 \times 28$.
8. Elettrodo interno con raffreddamento (Mat. acciaio Inox) $\varnothing 22 \times 20$.
9. Distanziatore in politene (Mat. politene).

I campioni raccolti, neutralizzati con AgNO_3 secco e distillati sotto vuoto, hanno dato i seguenti risultati (si è usato il termometro al decimo letto col cannocchiale e si sono eseguite tutte le misure in una unica mandata):

a) Acqua naturale arricchita:	$\left. \begin{array}{l} t = 30,11 \\ t = 30,10 \end{array} \right\} \bar{t} = 30,105$
b) Acqua naturale normale:	$\left. \begin{array}{l} t_0 = 29,80 \\ t_0 = 29,805 \end{array} \right\} \bar{t}_0 = 29,803$
c) Acqua Larderello arricchita:	$\left. \begin{array}{l} t = 30,18 \\ t = 30,175 \end{array} \right\} \bar{t} = 30,178$
d) Acqua naturale arricchita:	$\left. \begin{array}{l} t = 30,15 \\ t = 30,14 \end{array} \right\} \bar{t} = 30,145$
e) Acqua naturale normale:	$\left. \begin{array}{l} t_0 = 29,80 \\ t_0 = 29,80 \end{array} \right\} \bar{t}_0 = 29,800$

Come acqua naturale normale di riferimento, ci si è riferiti alla misura più vicina a quella eseguita sull'acqua arricchita. si è ottenuto perciò:

a') Acqua naturale arricchita: $\Delta t_{to} = 30,105 - 29,803 = 0,305_{29,803}$;
la concentrazione molare corrispondente è: $x\% = 0,104$.

b') Acqua Larderello arricchita: $\Delta t_{to} = 30,178 - 29,803 = 0,375_{29,803}$;
 $x\% = 0,124$.

c') Acqua naturale arricchita: $\Delta t_{to} = 30,145 - 29,800 = 0,345_{29,800}$;
 $x\% = 0,116$.

I due confronti con l'acqua naturale trattata prima e dopo dell'acqua di Larderello sono stati eseguiti per attestare la riproducibilità del metodo entro il limite previsto degli errori.

Poichè sono stati eseguiti arricchimenti continui, a corrente ed a temperatura costanti e x , $x_0 \ll 1$, si può applicare la formula:

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{x_0}{x} \right)^{q/(q-1)},$$

in cui:

V è il volume finale di acqua a concentrazione x in deuterio,

V_0 è il volume iniziale di acqua a concentrazione x_0 in deuterio, e

q è il fattore di separazione della cella elettrolitica.

Usando in luogo dei volumi i pesi, si commette un errore trascurabile; introducendo poi nella formula scritta nel modo seguente:

$$\lg \frac{V_0 x_0}{V x} = \lg \frac{x}{x_0} \cdot \frac{1}{q-1},$$

i dati riguardanti l'esperienza a') sull'acqua naturale, sapendo che $x_0 = 0,015\%$ (concentrazione naturale) e risolvendo rispetto a q , si ottiene: $q = 3,85$.

Se si risolve ora la stessa equazione usando le grandezze dell'esperienza c') sempre sull'acqua naturale (e quindi ancora con $x_0 = 0,015\%$) si ottiene: $q = 3,74$.

I due valori di q così ottenuti concordano bene entro gli errori sperimentali. Abbiamo assunto allora quale valor medio del fattore di separazione della cella, il valore $q_{\text{medio}} = 3,8$.

Se ora, noto questo valore, si risolve nuovamente la stessa equazione con

i dati della esperienza *b*), eseguita sull'acqua di Larderello, questa volta rispetto alla concentrazione iniziale, si ottiene: $x_0 = 0,0149\%$.

Stimando che gli errori sperimentali assommino a circa 4% (2% per l'incertezza del valore di q ottenuto entro il 5% e circa 3% per l'errore di lettura del termometro) si può concludere che il valore della concentrazione molare di deuterio sull'acqua di condensa del soffione è: $x_0 = 0,0149 \pm 0,0006\%$, cioè praticamente risulta uguale, entro meno dell'1%, all'acqua di rubinetto della città di Milano.

SUMMARY

Heavy water concentration of the Larderello (Toscana) natural water vapor has been measured by a float method. In order to rise precision, the sample was previously enriched in an electrolytic cell, whose separation factor had been controlled by Milan tap water, before and after the enrichment of the Larderello sample. Assuming the concentration of the former as 0,015%, the Larderello water vapor concentration results $0,0149 \pm 0,0006\%$.

On the Energy Range Relation for fast Muons in Rock.

M. MANDÒ and L. RONCHI jr.

Institute of Physics of the University - Arcetri, Firenze

(ricevuto il 22 Aprile 1952)

Summary. — A discussion is given of the best estimate of various types of energy loss; the energy-range relation for muons in rock and water is then evaluated. Apart from the uncertain amount of « nuclear » losses this relation should be quantitatively correct to about 1%. Finally two different curves are given, corresponding to zero « nuclear » losses and $1.0 \times 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$ fractional « nuclear » energy losses respectively; within them, linear interpolation (for any amount of « nuclear » losses) is allowed.

1. — Introduction.

A fairly accurate knowledge of the energy-range relation for muons in rock is most important for the interpretation of any cosmic ray experiment underground.

No such relation, among those, which have been used so far, can be relied upon quantitatively; the present paper is intended as a step towards a complete solution of the problem, through a detailed discussion of the various difficulties, the improvement of some approximate evaluation previously adopted by other authors and a final evaluation of the range by taking into account only collision, radiation and pair creation losses, which for brevity's sake will all be indicated henceforward as « extranuclear losses ». We believe that this evaluation, within its limits, is fairly accurate; we hope that it may help to reduce the existing uncertainties in the comparison between theory and experiments, and may thus allow to give experimentally stricter limits for the amount of other losses.

To this purpose the energy-range relation will also be evaluated for an assumed « nuclear » loss of $1.0 \times 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$; linear interpolation (and pos-

sibly moderate extrapolation) will thus allow an easy comparison with future experiments.

2. — Collision losses.

Since we are primarily concerned with very high energies, of the order of 100 GeV, we can assume, for the range of a 5 GeV kinetic energy muon, an average value of, say, 25 hg cm² ⁽¹⁾ and confine ourselves to the energy loss of particles with more than 5 GeV kinetic energy. This introduces a very small error ⁽²⁾, which, if the case may be, can be easily corrected and allows many simplifications to be made, for instance to dispense with the exact knowledge of the chemical composition of the rock, as we shall see.

Since there are some differences among different authors, we reproduce here our starting formulae.

For muon collision probability against electrons we use the formula given by BHABHA ⁽⁴⁾ and MASSEY and CORBEN ⁽⁵⁾ for 1/2 spin particles, namely:

$$(1) \quad \chi(E, E') dE' = \frac{2\pi NZ}{A} r_0^2 \frac{mc^2}{\beta^2} \frac{dE'}{E'^2} \left[1 - \beta^2 \frac{E'}{E'_m} + \frac{1}{2} \left(\frac{E'}{E + \mu c^2} \right)^2 \right],$$

(cfr. also ROSSI and GREISEN ⁽⁶⁾, page 244), where E is the energy of the muon (μ its rest mass), E' the energy transferred to the electron and E'_m the maximum transferable energy.

Formula (1) holds for sufficiently large values of E' , say $E' \gg \eta$, for which electrons may be considered as free. By multiplying (1) by E' , and integrating in the range $\eta \leq E' \leq E'_m$, we get

$$(2) \quad \left(-\frac{dE}{dx} \right)_{\text{coll} > \eta} = \frac{2\pi NZ}{A} r_0^2 \frac{mc^2}{\beta^2} \left[\ln \frac{E'_m}{\eta} - \beta^2 + \frac{1}{4} \frac{E'_m{}^2}{(E + \mu c^2)^2} \right],$$

allowance being made for the fact that in our case η may be chosen $\leq E'_m$.

(1) We use hg/cm² as a unit, in order to conform with the widespread usage of meters w.e.; by our notation, however, we hope to avoid possible confusion by emphasizing the purely massic equivalence.

(2) For instance, Wick's value ⁽³⁾ of the range of 5 GeV muon in iron is 28.3 hg cm², in water 21.6 hg cm²; Montgomery's (D. J. N. MONTGOMERY: *Cosmic Ray Physics*, Princeton 1949, p. 353) value is 22 hg/cm² in air.

(3) G. C. WICK: *Nuovo Cimento*, **1**, 302 (1943).

(4) H. J. BHABHA: *Proc. Roy. Soc.*, **164**, 257 (1938).

(5) H. S. W. MASSEY and H. C. CORBEN: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **35**, 463 (1939).

(6) B. ROSSI and K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240-309 (1941).

In the interval $0 \leq E \leq \eta$, we will adopt Bethe's (7) (8) loss formula, namely:

$$(3) \quad \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{coll} < \eta} = \frac{2\pi NZ}{A} r_0^2 \frac{mc^2}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mr^2\eta}{(1-\beta^2)I^2(Z)} - \beta^2 \right].$$

The total loss is therefore:

$$(4) \quad \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{coll}} = \frac{2\pi NZ}{A} r_0^2 \frac{mc^2}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mr^2 E'_m}{(1-\beta^2)I^2(Z)} - 2\beta^2 + \frac{1}{4} \frac{E_m'^2}{(E + \mu c^2)^2} \right],$$

where $I(Z)$ is the average ionization energy of the atom considered.

For the density effect correction we adopt Fermi's (9) limit formula ($x \rightarrow \infty$) [formula (39)], which can be written as follows

$$(5) \quad \Delta = -\frac{2\pi NZ}{A} r_0^2 \frac{mc^2}{\beta^2} \left[\ln \frac{\beta^2 h^2}{(1-\beta^2)I^2(Z)} \cdot \frac{Nc^2}{\pi m} \frac{Z}{A} - \beta^2 \right],$$

so that the final corrected expression for collision loss comes out to be:

$$(6) \quad \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{coll}} = \frac{2\pi NZ}{A} r_0^2 \frac{mc^2}{\beta^2} \left[\ln \frac{\pi m^2 c^2 E'_m}{Nc^2 h^2} \cdot \frac{A}{Z} - \beta^2 + \frac{1}{4} \frac{E_m'^2}{(E + \mu c^2)^2} \right].$$

At the high energies we are considering, formula (5) should be accurate enough: as a matter of fact, an approximate calculation based on HALPERN and HALL's (10) method, shows that, in the most unfavourable case (iron) the relative error in formula (6) may amount to about 1%, at 5 GeV and decreases obviously with increasing energy.

Had we used, instead of (3), a formula given by BLOCH (11) and adopted by HEITLER (12) and HALPERN and HALL (10), the final energy loss would differ by some percent: we adopt (3) following ROSSI and GREISEN (6), FERMI (9), and WICK (5), who has checked it (cf. also a discussion of this point by BETHE and LIVINGSTON (8)). Other correction terms, also given by BETHE and LIVINGSTON (8) are altogether negligible at high energies.

Finally it must be emphasized, as shown by FERMI (9) and, with more detail, by SCHÖNBERG (13), that Čerenkov losses are included in our final for-

(7) H. A. BETHE: *Ann. d. Phys.*, **5**, 325 (1930); *Zeits. f. Phys.*, **76**, 293 (1932).

(8) M. S. LIVINGSTON and H. A. BETHE: *Rev. Mod. Phys.*, **9**, 245 (1937).

(9) E. FERMI: *Phys. Rev.*, **57**, 485 (1940).

(10) O. HALPERN and H. HALL: *Phys. Rev.*, **73**, 477 (1948).

(11) F. BLOCH: *Zeits. f. Phys.*, **81**, 363 (1933).

(12) W. HEITLER: *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford, 1944, reprinted 1949), page 218.

(13) M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 159 (1951).

mula. Quite recently SCHÖNBERG ⁽¹⁴⁾ has cast some doubt on the correctness of the classical treatment, on which the calculation of the density effect correction is based; but, in any case, he concludes rather for a different distribution of the total loss between Cerenkov and other collision losses than for a different total amount of loss; the experimental evidence, as far as it goes, seems rather to confirm the validity of the formulae on which our formula (6) is based. Hereupon we will confidently use it.

3. - Radiation losses.

For the differential radiation probability by muons we will adopt the same formula as CHRISTY and KUSAKA ⁽¹⁵⁾, namely

$$(7) \quad \Phi(E, v) dv = \frac{16}{3} \alpha N r_0^2 \frac{Z^2}{A} \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \left(\frac{3v}{4} + \frac{1-v}{v} \right) \left[\ln \frac{12(1-v)}{5vZ^{1/3}} \cdot \frac{E}{\mu c^2} - \frac{1}{2} \right] dv.$$

v being the fractional energy loss and E the energy of the muon. When multiplied by $E v$ and integrated, formula (7) gives for the average energy loss the expression ⁽¹⁶⁾

$$(8) \quad \left(-\frac{dE}{dx} \right)_{\text{rad}} = 4 \alpha N r_0^2 \frac{Z^2}{A} \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 E \left[\ln \frac{E}{\mu c^2} + \ln \frac{12}{5Z^{1/3}} - \frac{1}{3} \right].$$

which we will use for the calculations in n. 7.

We may remark that the application of range concept and average energy loss evaluation is open to doubt for radiation losses, but we will not discuss this point here, because the contribution of radiation losses to the total is only a small fraction for most part of the range.

4. - Pair creation losses.

We have recently ⁽¹⁷⁾ worked out a formula for pair creation losses, namely

$$(9) \quad \left(-\frac{dE}{dx} \right)_{\text{pair}} = \frac{N}{A} \frac{m}{\mu} \frac{(\alpha Z r_0)^2}{\pi} E \left(19.3 \ln \frac{E}{\mu c^2} - 53.7 \right).$$

⁽¹⁴⁾ M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **9**, 210 and 372 (1952).

⁽¹⁵⁾ R. F. CHRISTY and S. KUSAKA: *Phys. Rev.*, **59**, 416 (1941).

⁽¹⁶⁾ E. P. GEORGE: *Progress in Cosmic Ray Physics*, Edited by J. G. Wilson, Amsterdam, 1952, page 409, gives the same formula, with the constant term within brackets taken as $-1/2$; this difference, however, is of no practical importance.

⁽¹⁷⁾ M. MANDÒ and L. RONCHI jr.: *Nuovo Cimento*, **9**, 105 (1952).

This formula, however, neglects the effect of the screening: to take it into account accurately would require a long calculation work with cumbersome formulae and has not yet been carried out. We may, however, hope that an approximate treatment, as already used by HAYAKAWA and TOMONAGA⁽¹²⁾ and based on the extrapolation of Bhabha's⁽¹⁹⁾ limit formulae, though not giving completely correct results, may at least supply us a reasonable estimate of the reduction introduced by the screening.

According to BHABHA⁽¹⁹⁾ the cross section for the production of a pair of total energy E' by a muon of energy E is given by

$$(10) \quad \sigma(E, E') dE' = \frac{56}{9\pi} (\alpha Z r_0)^2 f(E, E') (dE'/E'),$$

where $f(E, E')$ has the following approximate values, if screening is neglected

$$(11) \quad f(E, E') = \ln \frac{E'}{mc^2} \ln \frac{Em}{\mu E'}, \quad \text{for } 2mc^2 \ll E' \ll Em/\mu,$$

$$(12) \quad f(E, E') = \frac{9}{4} \left(\frac{Em}{\mu E'} \right)^2 \ln \frac{2E}{\mu c^2}, \quad \text{for } Em/\mu \ll E' \ll E.$$

If, on other hand, screening is taken into account, it comes out that (11) is correct only for $2mc^2 \ll E \ll 2amc^2$, where a is a constant of the order of $\alpha Z^{-1/3}$, while for $2amc^2 \ll E' \ll Em/\mu$ we should use

$$(13) \quad f(E, E') = \ln a \ln \frac{Em}{\mu E'}.$$

Similarly (12) can be used only for $2(E/\mu c^2)^{1/3} mc^2 a \ll E \ll E$, while for $Em/\mu \ll E' \ll 2(E/\mu c^2)^{2/3} mc^2/a$ we should use

$$(14) \quad f(E, E') = \frac{9}{4} \left(\frac{Em}{\mu E'} \right)^2 \ln \left(a \frac{E'\mu}{mE} \right).$$

To get the total loss, HAYAKAWA and TOMONAGA⁽¹²⁾ integrate $N dE \times \sigma(E, E') dE'$, by using for $f(E, E')$ the expressions (11), (12), (13), (14) over the ranges of E' above indicated. Although these are only limit formulae which do not even overlap with one another, they give nevertheless a fairly accurate integrated value, as we have shown in the above quoted paper⁽¹²⁾.

Much more so we may expect that such formulae will give a good estimate

(12) S. HAYAKAWA and S. TOMONAGA: *Progr. of Theor. Phys.*, **4**, 287 (1949).

(19) H. J. BHABHA: *Proc. Roy. Soc., A* **152**, 559 (1935); *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **31**, 394 (1935).

for the ratio of the losses as calculated with screening included and without screening; by multiplying this ratio by our more accurate evaluation of losses (9), we hope to get a quite reasonable value for pair creation loss.

The losses, as evaluated by the approximate method of HAYAKAWA and TOMONAGA previously outlined, would be:

$$(15) \quad \frac{8}{\pi} (\alpha Z r_0)^2 \frac{N}{A} \frac{m}{\mu} \left\{ E \left[\frac{16}{9} \ln a + 1 - \frac{m}{\mu} \ln \frac{2E}{\mu c^2} \right] - \frac{14}{9} \mu c^2 \left[a (1 - \ln 2) \ln \frac{E}{a \mu c^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + a \left(\frac{65}{28} - 2 \ln 2 + \ln^2 2 \right) - (1 - \ln 2) \ln \frac{E}{\mu c^2} - (2 - 2 \ln 2 + \ln^2 2) \right] \right\};$$

this is, we believe, the correct form of Hayakawa and Tomonaga's formula (also quoted by GEORGE, l. c. ⁽¹⁶⁾, page 410) which however contains some misprints.

If screening could be neglected we would obtain, by the same method, a loss

$$(16) \quad \frac{8}{\pi} (\alpha Z r_0)^2 \frac{N}{A} \frac{m}{\mu} \left\{ E \left[\frac{16}{9} \ln \frac{E}{\mu c^2} - \frac{m}{\mu} \ln \frac{E}{\mu c^2} - \frac{14}{9} + \ln 2 - \frac{m}{\mu} \ln 2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{14}{9} \mu c^2 \left[\ln \frac{E}{\mu c^2} (1 - \ln 2) + (2 - 2 \ln 2 + \ln^2 2) \right] \right\}.$$

The ratio may be simplified, by keeping only the main terms, as follows

$$(17) \quad \frac{\text{screening}}{\text{no screening}} = \frac{\frac{16}{9} \ln a + 1}{\frac{16}{9} \ln \frac{E}{\mu c^2} - \frac{14}{9} + \ln 2}.$$

By combining (9) and (17) we get what we consider as the most accurate evaluation to date of pair creation losses, namely

$$(18) \quad \left(- \frac{dE}{dx} \right)_{\text{pair}} = \frac{N}{A} \frac{m}{\mu} \frac{(\alpha Z r_0)^2}{\pi} E \frac{\left(19.3 \ln \frac{E}{\mu c^2} - 53.7 \right) \left(\frac{16}{9} \ln a + 1 \right)}{\frac{16}{9} \ln \frac{E}{\mu c^2} - \frac{14}{9} + \ln 2}.$$

5. - Other losses.

Until recently it was generally believed that «extra nuclear» losses practically exhausted all possible causes of absorption of fast muons.

Observations in nuclear plates underground by GEORGE and EVANS⁽²⁰⁾, however, have shown that muons may also give rise to nuclear stars: besides, penetrating pairs have also been observed underground by BRADDICK and HENSBY⁽²¹⁾, NASH⁽²²⁾ and WOLFENDALE⁽²³⁾: these pairs may also be reasonably ascribed to some hitherto unknown interaction of fast muons⁽²⁴⁾. The energy losses corresponding to these phenomena and which, for brevity's sake, will be called henceforward «nuclear» losses, have been evaluated by various authors, with widely different results.

GEORGE⁽²⁵⁾ estimates that star production is responsible for a fractional energy loss of about $0.5 \times 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$, while the fractional loss due to penetrating pair production is tentatively estimated by him as $2.0 \times 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$. GARELLI and WATAGHIN⁽²⁶⁾ evaluate theoretically this loss as $3.5 \times 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$. HAYAKAWA⁽²⁷⁾, on the other hand, believes that «nuclear» losses have been overestimated by the above mentioned authors.

A conclusive comparison with experiments cannot yet be done, in our opinion, because to date both the intensity-depth relation (deep underground) and the sea level spectrum of high energy muons are far from being well established experimentally.

If, anyway, we assume the intensity-depth relation, which has been elaborated by GEORGE (l. c.⁽¹⁶⁾, page 415, fig. 9) after a careful analysis of the existing data, to be exact⁽²⁸⁾, a remarkable agreement is found between George's «average» experimental curve and the theoretical one, also evaluated

(20) E. P. GEORGE and J. EVANS: *Proc. Phys. Soc., A* **63**, 1248 (1950); *A* **64**, 193 (1951).

(21) A. J. J. BRADDICK and G. HENSBY: *Nature*, **144**, 1012 (1939).

(22) F. NASH: *Ph. D. Thesis Manchester*, as quoted in the article by GEORGE (l. c.⁽¹⁶⁾, page 411 and 448).

(23) A. WOLFENDALE, as quoted by GEORGE, l. c.⁽¹⁶⁾, page 411 and 499.

(24) Accurate observations at great depths by COCCONI and others, however, set an upper limit to the cross section for penetrating pair production, which is considerably lower than the value $4 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2$ per nucleon estimated by NASH and WOLFENDALE.

Added in proofs. - The latest results of BRADDICK, NASH and WOLFENDALE (*Phil. Mag.*, **42**, 1277, (1951)) seem to confirm, at least for lead, their high value of the cross-section, obtained with a controlled cloud chamber technique, but AMALDI, CASTAGNOLI, GIGLI e SCIUTI, with counters and hodoscope technique, find again a much lower value.

(25) E. P. GEORGE, l. c.⁽¹⁶⁾, page 411.

(26) C. M. GARELLI and G. WATAGHIN: *Nuovo Cimento*, **8**, 695 (1950); *Phys. Rev.*, **79**, 718 (1950).

(27) S. HAYAKAWA: *Phys. Rev.*, **84**, 37 (1951).

(28) We may remark that BARNOTHY and FORRO's result at 2.550 hg cm^2 which appears to depart most from the average curve, should not have been included because

by GEORGE, on the basis of his energy losses and a muon sea level differential spectrum of the familiar power law type (E^{-3}). This agreement, however, cannot be taken as a confirmation of the high value ($2.5 \times 10^{-6} E$) of « nuclear losses » used by GEORGE, unless the exponent in the power law spectrum is confirmed.

Now, as remarked by GEORGE himself, such spectrum is the most natural extrapolation from CARO, PARRY and RATHGEBER's ⁽²⁹⁾ results, provided that the sea level spectrum reflects, apart from muon decay and absorption, the generation spectrum of pions; but this is only true if we accept the hypothesis, first put forward by GARELLI and WATAGHIN. l. c. ⁽²⁶⁾, that very energetic pions are not absorbed by nuclei. If, on the contrary, energetic pions are absorbed in nuclear encounters, it is more natural to extrapolate with a power law the generation spectrum of pions, rather than the sea level spectrum of muons; if this is done, however, the competition between π - μ -decay and absorption of pions leads us to expect a steeper decrease of the sea level muon intensity with increasing energy. Smaller losses would then account for the same intensity-depth curve.

No direct evidence can be brought forward either in favour or against the legitimacy of neglecting nuclear absorption of very energetic pions; however, such indirect evidence as exists, (e.g., the inverted temperature effect underground ⁽³⁰⁾ ⁽³¹⁾, and the anomalous zenithal distribution ⁽³²⁾ ⁽³³⁾, seems rather to disprove the hypothesized change of the pions' behaviour at very high energies.

We are therefore inclined to accept Hayakawa's opinion and will carry out the range evaluation, first, on the basis of « extra-nuclear » losses alone; we will then introduce, for the purpose of comparison with future experiments, a tentative value for fractional « nuclear » losses, namely $1.0 \times 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$, linear interpolation being certainly allowed between the two curves.

it refers to an inclined direction and has an enormous statistical error; besides, Clay's intensities have been plotted by GEORGE against the depth values given by CLAY, which were not evaluated on the usual density basis. If the « mass-equivalent » values are introduced, the agreement between Clay's data and the average curve appears to improve. Finally recent absolute measurements of intensity by BOLLINGER and COCCONI at 1574 hg/cm^2 (private communication) fit rather well George's curve.

⁽²⁹⁾ D. E. CARO, J. K. PARRY and H. D. RATHGEBER: *Nature*, **165**, 689 (1950).

⁽³⁰⁾ M. FORRO: *Phys. Rev.*, **72**, 868 (1947).

⁽³¹⁾ J. W. MCANUFF: *Ph. D. Thesis London* (1951 as quoted b. GEORGE, l. c. ⁽¹⁶⁾, page 420).

⁽³²⁾ J. BARNOOTHY and M. FORRO: *Zeits. f. Phys.*, **104**, 744 (1937).

⁽³³⁾ COCCONI and others, private communication; the effect is quite well established by these authors.

6. — Chemical composition of the rock.

Very often in experiments underground the chemical composition of the overlying rock is not perfectly known, while a fairly good estimate of its average density is easier to get.

Collision losses are proportional to Z/A ; it is to be expected and easily verified that, except for the case of water, no serious error will be introduced by putting $Z/A = 1/2$ ⁽³⁴⁾; but, at high energies, where radiation and pair creation losses, which depend on Z^2/A , play an important role, the departure of single rocks from the average behaviour may be expected to be more serious.

To investigate this point we first evaluated the average value of Z^2/A for the *average* composition of various classes of rocks and we got: a) $(Z^2/A)_{av} = 5.9$ for igneous rocks; b) $(Z^2/A)_{av} = 5.6$ for sedimentary rocks ⁽³⁵⁾. Crystalline schist lay obviously in between.

We then examined some typical rocks in each class and found that the single average values of Z^2/A ranged from 5.5 (Pegmatite, Elba Island, with no iron content) ⁽³⁶⁾ to 6.3 (Olivine basalt, Hurtsville, near Sidney, New South Wales, with a density of 3.03 g/cm³) ⁽³⁷⁾ for igneous rocks, while departures from the average are generally smaller for sedimentary rocks. It is to be noted that the above given extreme values are exceptional and refer to rocks comparatively rare in the outer crust of the earth. Of course for simple rocks departures may occasionally be bigger (e.g. kaolin gives $(Z^2/A)_{av} \sim 5.0$ and salt $(Z^2/A)_{av} \sim 7.0$); but simple rocks constitute practically no problem, owing to their well known chemical composition.

It turns out, therefore, that the situation is better than could be expected at first thought; as a matter of fact, even if we assume for Z^2/A the round value 6 (which will generally be in excess, especially for sedimentary rocks), it is readily seen that the error in the range, up to 500 GeV, will not exceed 2% in the worst case.

For the same typical rocks the average value of Z/A was also evaluated and it was found to be always less than 0.5, but with an error which never exceeds 1%.

« Nuclear » losses would be independent of the composition of the rock if purely nucleonic absorption were assumed; but, even if we consider these

⁽³⁴⁾ At low energies, of the order 10 GeV, of course, the exact knowledge of the composition of the rock would be needed for an accurate evaluation of the density effect correction, cfr. note ⁽²⁾.

⁽³⁵⁾ K. RANKAMA and TH. G. SAHAMA: *Geochemistry* (Chicago, 1949), page 222.

⁽³⁶⁾ *Enciclopedia Italiana*, vol. XVII (Roma, 1933), page 724.

⁽³⁷⁾ B. S. WASHINGTON: *Chemical Analyses of igneous rocks* (Washington, 1917).

losses to be due to interaction with the nucleus as a whole, and assume a cross section proportional to the geometrical one, no substantial error will be introduced by a purely massic absorption, in view of the other existing uncertainties on these losses.

In conclusion we will carry out the range calculation for a *standard rock* (s.r.) defined by $A_{av} = 24$, $Z_{av} = 12$, $(Z/A)_{av} = 0.5$, $(Z^2/A)_{av} = 6$ and we hope that the results will apply practically to every rock. Anyway, to take into account extreme cases, we will put the results in a form which allows speedy correction for any actual value of (Z^2/A) ; besides, the case of water ($Z/A = 0.555$; $Z^2/A = 3.66$) will be dealt with separately.

7. - Range in standard rock and in water.

On the basis of the above detailed expressions (6), (8), (18) for the various types of energy loss, the energy range relation can be evaluated by numerical integration. We used the following values of the basic constants: $r_0 = 2.82 \times 10^{-13}$ cm, $mc^2 = 0.511$ MeV, $N = 6.02 \times 10^{23}$, $\alpha = 1/137$, μ -meson mass $= 210 m$ ⁽³⁸⁾ and $a \sim 60$.

The results, for the energy interval 5 to 100 GeV, are collected in Table I, with a numerical accuracy which obviously exceeds the actual uncertainty, due to the various causes previously discussed. The table also includes the « collision range » in s.r., namely the range that would result if collision losses were only present: this enables one to evaluate corrections for different values of (Z^2/A) by simple interpolation.

Numerical integration would of course do also for higher energies; it is, however, expedient, in order to be able to introduce easily any corrections that may be required (e.g. to take into account a possibly different value of $(Z^2/A)_{av}$) to put the energy-range relation in analytical form.

Now it is easily seen that the total energy loss may be written as

$$(19) \quad -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{total} = A(E) + EB(E),$$

where $A(E)$ and $B(E)$ are slowly varying functions of E . By assuming them to be constant and by putting $C = A/B$, the integration of (19) gives for the range $R(E)$:

$$(20) \quad R(E) = R(E_0) + \frac{1}{B} \ln \frac{C + E}{C + E_0},$$

⁽³⁸⁾ In the above quoted paper ⁽¹⁷⁾ we assumed $\mu = 215 m$, but this makes no significant difference in the numerical coefficients within brackets in formulae (9) and (18).

TABLE I.

Energy GeV	Range in water hg/cm ²		Range in standard rock hg/cm ²		
	« extra nuclear » losses alone	« nuclear losses » included	collision losses alone	« extra nuclear » losses alone	« nuclear losses » included
5	21.6	21.6	25.0	25.0	25.0
10	42.8	42.8	48.6	48.6	48.6
20	83.6	83.6	93.9	93.9	93.9
30	122.8	122.4	138.0	137.0	136.5
40	161.1	160.3	181.5	178.9	177.9
50	198.9	197.4	224.5	220.0	218.2
60	236.1	233.8	267.1	260.3	257.7
70	272.8	269.7	309.5	300.0	296.3
80	309.1	305.1	351.6	338.9	334.2
90	345.1	339.9	393.5	377.3	371.4
100	380.7	374.4	435.3	415.2	407.9

which has actually been used by HAYAKAWA and TOMONAGA, l. c. ⁽¹⁵⁾, and by GEORGE, l. c. ⁽¹⁶⁾, with suitably chosen values of A and B .

We have split the energy interval 100-500 GeV in four subintervals 100 GeV wide, and determined the relevant values of the constants from formulae (6), (8), (18). These values are collected in Table II (energy in GeV, range in

TABLE II.

Auxiliary constants for the evaluation of the range (« extra-nuclear » losses alone).

E_0	$R(E_0)$	$10^4 B_{E_0}$	C_{E_0}	$R(E_0 + 100)$
standard rock				
100	415	2.680	908.0	768
200	768	2.840	873.1	1082
300	1082	2.936	853.9	1365
400	1365	3.006	841.1	1623
water				
100	381	1.635	1652.3	720
200	720	1.732	1588.7	1034
300	1034	1.791	1553.8	1327
400	1327	1.833	1530.6	1603

hg cm²); the subscript E_0 denotes an average value over the 100 GeV sub-interval beginning at E_0 .

By means of formula (20) an additional «nuclear» loss is also easily taken into account; formula (20) could also be tentatively used to extrapolate, with suitably chosen values of A and B , the energy range relation beyond 500 GeV.

These results, however, would be less reliable on many accounts, as it has been made clear in the preceding paragraphs.

Finally the energy range relation has been plotted in fig. 1 and in fig. 2;

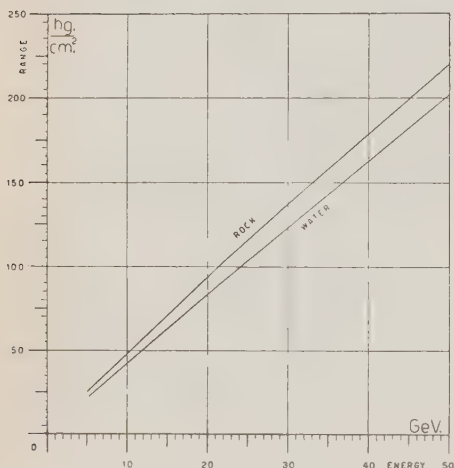


Fig. 1.

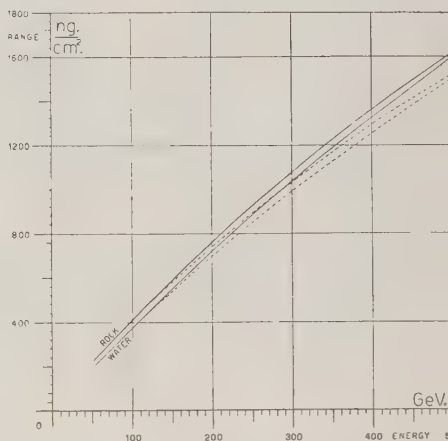


Fig. 2.

upper solid curve refers to s.r., lower solid curve to water, both evaluated with «extranuclear» losses alone; dotted curves include instead a fractional energy loss of $1.0 \times 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$; interpolation between solid and dotted curves will allow to take «nuclear» losses into account, once they will be better known.

In conclusion we wish to thank Prof. E. AMALDI and Prof. S. FRANCHETTI for their stimulating interest in the present work and Prof. COCCONI for communicating his results prior to publication.

RIASSUNTO

Nessuna delle relazioni fra energia e percorso finora usate per i mesoni in roccia può essere considerata soddisfacente quantitativamente. Nel presente lavoro si discutono le varie difficoltà, si migliorano alcune valutazioni approssimate già adottate da altri autori, e infine si valuta il percorso, tenendo conto solo delle perdite per urto, radiazione e creazione di coppie. Riteniamo che questa valutazione riduca le incertezze esistenti nel confronto fra teoria e esperienza, e permetta di dare sperimentalmente dei limiti più stretti alle perdite « nucleari ». A questo scopo la relazione energia-percorso è stata valutata anche con un ipotetico valore di $1,0 \times 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$ per la perdita di energia relativa dovuta ad eventi « nucleari ».

Applicazione del metodo del galleggiante alla misura rapida della concentrazione in D_2O di soluzioni acquose di acqua pesante.

E. CERRAI, C. MARCHETTI e M. SILVESTRI

Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 21 Aprile 1952)

Riassunto. — Si descrive un metodo di misura della concentrazione di D_2O in campioni di acqua, fondato sull'uso del galleggiante. Il metodo non richiede taratura con campioni aventi concentrazione nota in D_2O .

1. — Si vuol descrivere l'impiego di un metodo ben noto, quello del galleggiante, nella variante introdotta da SAPIRSTEIN ⁽¹⁾, utilizzata però come metodo assoluto, cioè senza l'impiego di campioni di concentrazione nota in D_2O , per la taratura dell'apparecchio.

Un campione di acqua da analizzare, avente un volume da 0,5 a 2 cm³ opportunamente neutralizzato, se necessario, e trattato con qualche mg di $KMnO_4$ viene introdotto nella bolla più alta di un distillatore a tre stadi, costruito in vetro neutro, secondo lo schema di fig. 1. L'introduzione si fa a mezzo di siringa in vetro con ago di acciaio inossidabile, dopo di che si applica il cono *A*, ingrassato con grasso da vuoto, e si fa il vuoto nell'apparato con una pompa rotativa munita di trappola a ghiaccio secco. Si fa in modo che il degasamento del campione (che dura qualche decina di secondi) avvenga senza eccessivo ribollimento, dopo di che l'aspirazione viene esclusa, e l'apparato, in cui la pressione è di alcuni mm Hg, è pronto per la distillazione. Basta chiudere con appositi stringigomma i condotti (1), (3) e (4) ed accendere la resistenza (1') che riscalda l'acqua, intorno alla prima bolla; il campione ne evapora e condensa nella sottostante, che è raffreddata con acqua corrente (a circa 15 °C) attraverso il condotto (2). Quando la prima distillazione è compiuta, si procede con le altre, usando analogamente le resistenze (2') e (3') ed il raffreddamento ad acqua. L'ultima distillazione porta direttamente il campione nello stelo (C) in cui sgocciola, attraverso l'ugello (u) avente un

⁽¹⁾ L. A. SAPIRSTEIN: *Journ. Lab. Clin. Med.*, **35**, 793 (1950).

diametro di circa 2 mm, depositandosi nel rigonfiamento del fondo che contiene un piccolo galleggiante di vetro, fino a raggiungere un livello pari a circa una volta e mezza o due l'altezza del galleggiante stesso. Questo procedimento di preparazione del campione non impegna più di mezz'ora o tre quarti d'ora.

La potenza delle resistenze (1'), (2') e (3') può essere variata da circa 20 a circa 80 W; esse sono costruite in filo di nichel-cromo, immerse direttamente in acqua ed alimentate a circa 40 V. Si usa la massima potenza per scaldare l'ampolla che contiene il liquido in evaporazione e la minima per tutte quelle a monte di essa.

Ottenuto il campione puro, si introduce aria secca nell'apparato e si distacca lo

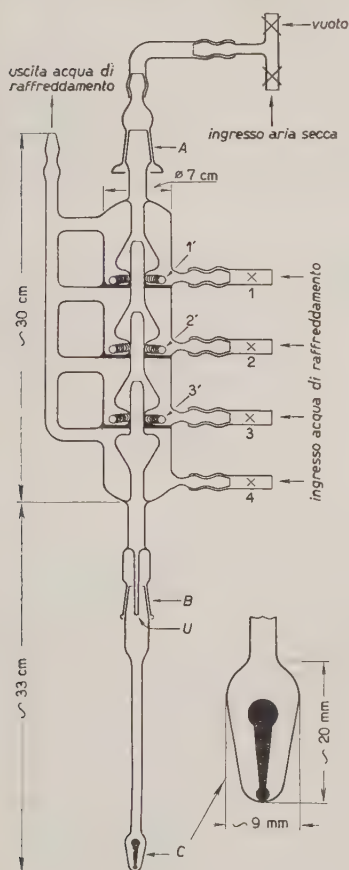


Fig. 1.

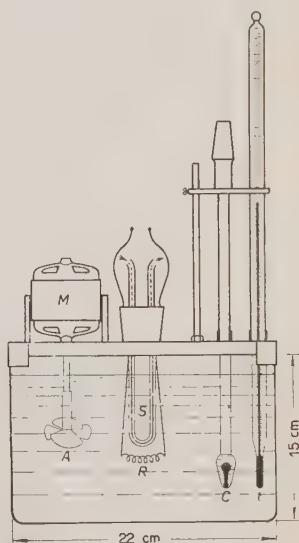


Fig. 2.

stelo (C) che viene collocato in apposita sede in modo che peschi in un bagno termostatico come in fig. 2. Lo stelo può essere chiuso con cono di vetro quando si misurano concentrazioni superiori al 5% in D_2O , per evitare inquinamenti dovuti all'umidità atmosferica durante il breve tempo di misura.

Il bagno termostatico è costituito da una vaschetta di vetro a facce all'incirca piane e parallele (che può essere delle seguenti dimensioni: $22 \times 15 \times 12$ cm³) quasi completamente riempita di acqua tenuta in forte agitazione dall'agitatore (A), azionato dal motore (M). Un tubo di rame (s), percorso da acqua di rubinetto con portata regolabile, consente un raffreddamento dell'acqua

della vaschetta, quando necessario, mentre questa può essere riscaldata mediante la resistenza (R) di potenza da 100 a 600 W in nichel-cromo a 40 V che vi è immersa direttamente. In tal modo si può ottenere qualunque temperatura compresa fra $+20\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $+60\text{ }^{\circ}\text{C}$ con la desiderata velocità di ascesa o di discesa. Accanto allo stelo (C) si trova il termometro (t) che può essere al decimo di grado o al centesimo, del tipo Beckmann. Le temperature sono lette a mezzo di cannocchiale, e quindi sul Beckmann è apprezzabile la temperatura fino al millesimo di grado, il che è veramente sovrabbondante a causa di altre fonti di errore che limitano la sensibilità del metodo. Il galleggiante, in vetro Pyrex o Ignis, è contenuto nel fondo dello stelo che è fatto ad oliva in modo che non ci sia azione di parete fra galleggiante e recipiente, e deve avere densità apparente uguale a quella dell'acqua naturale ad una temperatura compresa all'incirca tra i $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ ed i $30\text{ }^{\circ}\text{C}$.

2. - La misura si effettua nel modo seguente: quando tutto è disposto come in fig. 2, si riscalda, mediante la resistenza (R), l'acqua della vaschetta, finché la densità del campione non sia scesa ad un punto tale, che il galleggiante si immerge fino a toccare il fondo dello stelo; quindi si interrompe il riscaldamento e si lascia raffreddare il bagno termostatico per dispersione naturale o mediante il refrigerante (s) in modo però, che la velocità di discesa della temperatura non sia superiore a $0,2\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$, perchè la temperatura del campione, nello stelo, coincida con la temperatura che si legge sul termometro entro la precisione con cui si fa la lettura.

La densità del campione salirà allora gradatamente e, quando essa raggiungerà il valore della densità apparente del galleggiante, quest'ultimo si staccherà dal fondo ed inizierà la salita attraverso il liquido, man mano che la densità del mezzo continuerà ad aumentare. L'osservazione del distacco dal fondo è fatta o traguardando attraverso la bacinella, a facce pressapoco piane e parallele, del bagno, o proiettando un'immagine ingrandita. Si prende nota della temperatura t_0 a cui avviene il distacco (ripetendo, per sicurezza, la lettura). Si ottiene la riproducibilità entro $\pm 0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$, e l'attrito di primo distacco è praticamente nullo, perchè lo stelo si trova in lieve vibrazione dovuta all'agitazione dell'acqua. Se si ripete la stessa operazione con un nuovo campione si otterrà la temperatura t di distacco; orbene la differenza $t - t_0$ è funzione, a parità di t_0 , della concentrazione in D_2O del campione.

Come è noto (2), la relazione che lega la densità di un'acqua alla sua concentrazione x in D_2O è data dall'espressione $x - a\Delta S/(1 - b\Delta S)$, dove $\Delta S = \delta/d'_1 - d_1/d'_1$ (δ è la densità della miscela incognita, d'_1 la densità dell'acqua naturale, d_1 la densità dell'acqua, H_2O , priva di deuterio, il tutto alla stessa temperatura t , ed a e b sono opportuni coefficienti, funzioni della temperatura). Se t_0 è la temperatura di distacco del galleggiante in acqua naturale, la sua densità d_0 sarà uguale a quella dell'acqua naturale a quella temperatura (nell'incertezza di $\pm 0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$), mentre la sua densità d alla temperatura di distacco t nell'acqua in esame, sarà: $d = d_0 (1 + 3\beta(t - t_0))$, dove 3β è il coefficiente di dilatazione cubica del vetro di cui è costruito il galleggiante. Ma d è pure la densità della miscela incognita (sempre nei limiti della incertezza

(2) I. KIRSCHENBAUM: *Physical Properties and analysis of heavy water* (New York, 1951), p. 15.

corrispondente a $\pm 0,01$ °C) e quindi si può introdurre questa espressione nelle formule su scritte, in luogo di δ . Tenendo conto delle espressioni di a e di b si ricava:

$$(1) \quad x = \frac{\frac{d_0}{cd'_1[1 + 3\beta(t - t_0)]} - 1}{\left(\frac{M_2}{M_1} - 1\right) - \left(\frac{M_2}{M_1} \frac{d_1}{d_2} - 1\right) \frac{d_0}{cd'_1[1 + 3\beta(t - t_0)]}},$$

in cui, riassumendo:

d_0 = densità dell'acqua naturale alla temperatura t_0 ,

d'_1 = densità dell'acqua naturale alla temperatura t ,

d_1 = densità dell'H₂O pura alla temperatura t ,

d_2 = densità della D₂O pura alla temperatura t ,

$c = 0,999984$,

$M_2 = 20,0338$,

$M_1 = 18,0206$,

$\frac{M_2}{M_1} = 1,11172$.

Data l'omogeneità della formula, le densità possono essere sia assolute che relative.

Così, per ogni tipo di galleggiante, resta stabilito β , dalla qualità del vetro, e da questa e dalla formula la sua densità apparente e quindi la temperatura t_0 , perciò si possono tabulare i valori di x per diverse differenze di temperature $t - t_0$, in modo che, costruendo un grafico, siano ricavabili tutti i valori intermedi. Assumendo una nuova temperatura t_0 si ha una nuova curva che è ugualmente significativa e che serve per galleggianti che hanno la temperatura di distacco in acqua naturale in quell'intorno. Se però vogliamo una curva indipendente dal coefficiente di dilatazione del vetro β ,

in modo cioè che sia valida sempre, e che l'influenza di quest'ultimo venga introdotta come correzione, si può tener conto che essendo $3\beta(t - t_0)$ sempre $\ll 1$ si ha, con ottima approssimazione $d_0/(1 + 3\beta(t - t_0)) = \sim d_0[1 - 3\beta(t - t_0)]$,

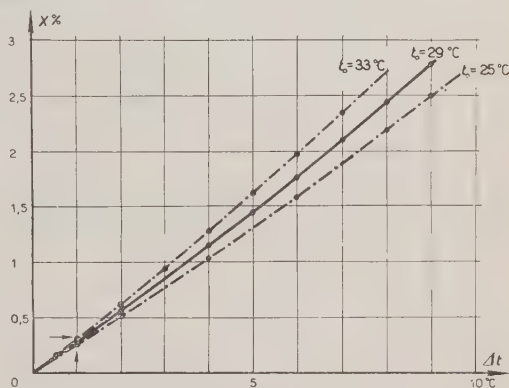


Fig. 3.

ed allora la formula (1), con opportune semplificazioni, diviene:

$$x = \frac{\frac{d_0}{cd'_1} - 1}{\left(\frac{M_2}{M_1} - 1\right) - \left(\frac{M_2}{M_1} - 1\right) \frac{d_0}{cd'_1}} - \beta \frac{3(t - t_0) \frac{d_0}{cd'_1}}{\frac{M_2}{M_1} \left(1 - \frac{d_1}{d_2}\right)}.$$

In tal modo x risulta funzione di t e t_0 ; per ogni galleggiante t_0 esiste una certa funzione $f(\Delta t) = f_1(t_0, t) - \beta f_2(t_0, t)$, che fornisce la concentrazione in D_2O , in funzione della differenza $t - t_0$. La funzione f_1 dà la concentrazione, supposta nulla la dilatazione del vetro del galleggiante, la seconda, moltiplicata per β , fornisce il termine correttivo dovuto a questa causa. Per concentrazioni inferiori a circa 0,2% questa correzione può essere trascurata. A scopo indicativo riportiamo in fig. 3 un grafico della funzione f_1 . Per la funzione βf_2 si può assumere (per galleggianti di pyrex o igni) l'espressione approssimata (per $\Delta t < 10^\circ C$): $\beta f_2 \% = \sim 0,01 \Delta t$.

SUMMARY

A float method for determining heavy water concentration in water samples of low D_2O content (a few mole percent) is described. This method needs no calibration with samples of known D_2O content.

Rivelatore a scintillazione per particelle α .

A. MALVICINI

Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 21 Aprile 1952)

Riassunto. -- Si descrive un contatore a scintillazione per la rivelazione di contaminazioni radioattive di emettitori α . Sue principali caratteristiche sono: alta sensibilità, semplicità di costruzione e praticità d'uso. Tale contatore è insensibile alle radiazioni X e γ e in condizioni di buona rivelazione per le particelle α ha un fondo inferiore a 10 impulsi per ora.

1. — Un contatore a scintillazione per la rivelazione di particelle α consiste essenzialmente di uno schermo fluorescente, un tubo fotomoltiplicatore, una scatola di protezione dalla luce e un sistema di amplificazione e conteggio ⁽¹⁾ ⁽²⁾ ⁽³⁾.

Abbiamo usato come schermo fluorescente il solfuro di zinco attivato con argento, in strati molto sottili; questo fosforo è particolarmente adatto nel caso di particelle α le quali hanno un percorso corto. Per strati di spessore dell'ordine di una decina di mg cm^{-2} il solfuro di zinco assorbe completamente le particelle pur rimanendo pressoché trasparente alle radiazioni luminose da esso emesse.

Sono stati studiati diversi procedimenti per la preparazione degli strati. I migliori risultati sono stati ottenuti facendo sottili pellicole con una miscela di ZnS in polvere, formvar e cloroformio nelle seguenti proporzioni:

Zn S	» 2
Formvar	» 0,5
Cloroformio	» 20

Depositando la soluzione indicata su di un piano levigato e perfettamente orizzontale e lasciandola evaporare, si ottengono sottili pellicole fluorescenti.

⁽¹⁾ F. H. MARSHALL, I. W. GOLDMAN e A. J. BENNETT — *R.S.I.*, **19**, 744 (1948).

⁽²⁾ J. D. GRAVES e J. P. DYSON: *R.S.I.*, **20**, 560 (1949).

⁽³⁾ A. S. GOLDIN, E. R. ROHRER e R. L. MACKLIN: *R.S.I.*, **21**, 554 (1950).

Ottimi risultati sono stati pure ottenuti usando polvere microcristallina di ZnS semplicemente incollata su cristalplast in modo da ottenere uno spessore di ZnS di 10 mg cm^{-2} .

I «fosfori» descritti sono insensibili ai raggi X e γ .

Il grande rendimento luminoso del ZnS rende possibile l'impiego di comuni

fototubi RCA 931 A, nonostante il loro elevato fondo. A causa del corto percorso delle particelle α la protezione del fototubo dalla luce in corrispondenza dello strato fluorescente deve essere ottenuta con una parete molto sottile, attraversabile dalle particelle α .

Abbiamo usato a questo scopo dei fogli sottili di alluminio in duplice strato. Un solo strato di alluminio, a causa della sua porosità lascia passare la luce in modo da aumentare notevolmente il fondo del fototubo.

Il circuito di alimentazione del fototubo è illustrato in fig. 1. Gli impulsi vengono presi dall'ultimo dinodo anzichè dall'anodo il quale è collegato a terra. Si evita in questo modo di rivelare insieme al segnale le scariche fra il catodo e l'anodo tra i quali esiste una differenza di potenziale di circa 1000 V in condizioni normali di lavoro.

L'impulso così ottenuto non è sensibilmente ridotto in ampiezza ed ha segno invertito rispetto all'impulso che si ottiene comunemente dall'anodo.

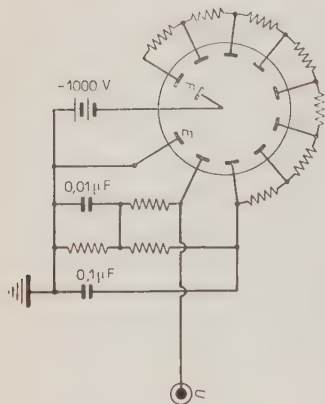


Fig. 1. — Connessioni al fototubo. Le resistenze sono tutte di $300 \text{ k}\Omega$. F, fotocatodo; E, elettrodo collettore; U, uscita dell'impulso.

2. — Sono stati realizzati due tipi di rivelatori.

Il primo tipo è illustrato nella fig. 2.

Il fototubo è fissato in una scatola parallelepipeda che porta una finestra nella faccia prospiciente al fotocatodo. Su questa finestra viene fissato lo strato fluorescente; una guida di luce di alluminio a piramide tronca convoglia i fotoni al fotocatodo.

La protezione dalla luce è realizzata disponendo sopra il fosforo per tutta l'area della finestra due strati di alluminio di 5μ di spessore ciascuno.

L'energia assorbita da questo schermo è, per particelle incidenti perpendicolarmente, di circa 2 MeV. In conseguenza di ciò viene ridotto il numero dei fotoni emessi dal fosforo; ma tale perdita è compensata dalla riflessione che lo strato di Al opera sui fotoni e l'altezza dell'impulso nel fototubo non viene sensibilmente ridotta.

Si è misurata l'efficienza (rapporto fra il numero degli impulsi e il numero delle particelle incidenti) per un fascio di particelle α collimate perpendicolarmente allo strato di Al e con energia di qualche MeV, utilizzando una sorgente di Po tarata a mezzo di una camera di ionizzazione. Il valore ottenuto è molto prossimo a uno. Per α non collimate, l'assorbimento da parte dell'alluminio, riduce l'efficienza a circa $1/2$.

L'area sensibile del rivelatore è circa $4 \times 3 \text{ cm}^2$ e si è controllato che l'efficienza è pressochè costante su tutta la superficie.

L'altezza di un impulso da particelle α di polonio all'uscita del fotomoltiplicatore è di 600 mV ed il rapporto segnale/fondo è circa 40.

Il secondo tipo di rivelatore, è stato ottenuto, incollando, con balsamo del Canada, direttamente il solfuro di zinco sul fotomoltiplicatore in corrispondenza del fotocatodo e ricoprendo l'intero fototubo con due fogli di alluminio di 5 μ di spessore. In questo modo l'area sensibile viene ridotta a $3 \times 1,6 \text{ cm}^2$, in compenso l'altezza dell'impulso viene più che raddoppiata in confronto a quella ottenuta con il tipo 1^o, per la miglior raccolta dei fotoni sul fotocatodo. Si hanno impulsi alti 1,3 V all'uscita del fotomoltiplicatore con una tensione d'alimentazione di 1000 V. Il rapporto segnale/fondo è circa 80.

Tale rapporto varia notevolmente con il potenziale del fotocatodo, ed aumenta quando tale potenziale diminuisce. Facendo lavorare il fototubo a 650 V con il 2^o tipo di contatto si ha un valore di questo rapporto di circa 120. La variazione del rapporto segnale/fondo in funzione della tensione dipende anche dalla corrente di fondo dovuta all'effetto di tensione del vetro del fotomoltiplicatore (4).

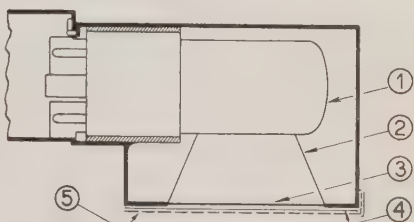


Fig. 2. - Sezione del rivelatore. 1. Fotomoltiplicatore (931)A. 2. Guida di luce di alluminio. 3. Schermo di ZnS. 4. Finestra sottile di alluminio. 5. Reticella metallica protettiva.

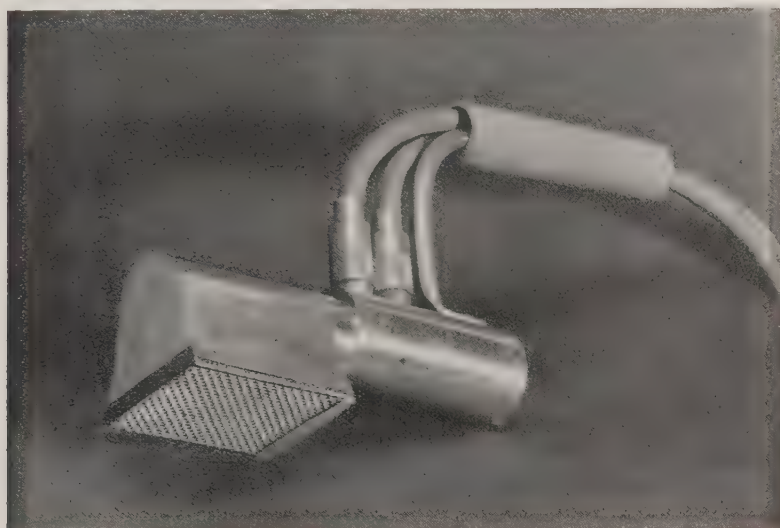


Fig. 3. - Rivelatore di particelle α .

(4) M. G. TAYLOR: *Journ. de Phys. et le Rad.*, s. VIII, 10, 255 (1949).

I due contatori schermati nel modo descritto sono insensibili alla luce visibile, come è stato verificato esponendoli alla luce di una lampada di 100 W accesa a pochi cm di distanza.

In entrambi i tipi di rivelatori abbiamo usato una RC di ingresso di 10^{-4} s; si ottiene così un potere risolutivo sufficiente allo scopo.

Data la notevole ampiezza degli impulsi, per la loro registrazione è sufficiente un amplificatore a guadagno 50-100. Usando un amplificatore del genere e un discriminatore con un taglio corrispondente a condizioni di buon funzionamento per il conteggio di particelle α di qualche MeV, il fondo è inferiore a 10 impulsi per ora. In queste condizioni, variazioni della tensione d'alimentazione dell'ordine del 5% non influenzano sensibilmente il conteggio.

3. - L'apparecchio realizzato in questi laboratori, nella forma indicata dalla fotografia fig. 3, e seguendo lo schema di fig. 2, s'è dimostrato efficace monitore in manipolazioni intorno al polonio, il quale, come è noto, dimostra un elevato grado di tossicità.

SUMMARY

The A. describes scintillation counter for the detection of radioactive contaminations of α particle emitters. Its main features are: high sensibility, simple building and easy use. This counter is insensible to X and γ rays; under conditions of good α particle detection, its background is less than 10 pulses per hour.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Hydrogen Isotopes in Steam Wells.

G. BOATO e G. CARERI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

G. G. VOLPI

Istituto di Chimica dell'Università - Roma

(ricevuto il 15 Aprile 1952)

As far as we know the deuterium content in natural gases seems not to have been much considered ⁽¹⁾. Following a suggestion of the Larderello Corp., we have made a rough analysis of the hydrogen isotopes of the steam from the Solfioni ⁽²⁾, and of the elementary hydrogen which is also contained in these steam wells, in a quantity about 1/1 000 or less of that of the steam. At present there are no clear ideas about the origin of this hydrogen, which is always present in natural and volcanic gases.

To measure the deuterium content in the steam, hydrogen has been prepared from it by complete reduction of water samples with metallic zinc at 350 °C. Some samples artificially enriched by

1/10 000 part of deuterium have been also prepared to test the whole method of analysis. A Nier-type mass spectrometer has been used, operated with magnetic scanning. The HD/H₂ ratio has been evaluated in the usual way, from the extrapolated (HD⁺ + H₃⁺)/H₂⁺ ratio at zero H₂ pressure. The results are as follows. The analysis of the water from the pipe collecting the condensed steam of all the wells, showed an enrichment factor ⁽³⁾ 1 ± 0.1 ; the same value has been found also for the steam of a single well. The analysis of the hydrogen from different wells, showed enrichment factors so near among themselves, to allow us to consider a common value for all the sources. This value, averaged over five steam wells from different places, was 0.79 ± 0.05 . One sees that the deuterium content of the steam is not different from that of ordinary tap water; but on the other hand the deuterium content of the elementary hydrogen is certainly rather less. A possible expla-

⁽¹⁾ A. F. SCOTT: *Science*, **79**, 565 (1934). and L. SHAMOVSKY and N. KAPUSTINSKAYA: *Acta Physicochim. U.R.S.S.*, **7**, 797 (1937) analyzed some water samples collected in the inside of the earth at a depth of about 1 500 meters, finding no significant variation in the heavy water content compared with that of tap water.

⁽²⁾ For a brief description of these «Solfioni» of Larderello and bibliographic details about them, see our previous note on the argon isotopes in: *Nuovo Cimento*, **9**, 44 (1952).

⁽³⁾ Defined as $\frac{[D]/[H] \text{ in the sample}}{[D]/[H] \text{ in tap water}}$.

nation of this variation could be found in a diffusion separation of the gas, due to some porous material inside the earth; as a matter of fact a single diffusion separation could give an enrichment factor of $(2/3)^{1/2} = 0.82$.

An alternative explanation seems also to be possible if one thinks of the exchange reaction $\text{H}_2\text{O} + \text{HD} = \text{HDO} + \text{H}_2$, which can be catalyzed inside the earth, before the steam can reach the atmosphere.

Since the equilibrium constant of

this reaction is > 1 , the deuterium must concentrate in the water and leave the elementary hydrogen poorer in it. Of course one does not observe the enrichment of the steam, due to the very small amount of hydrogen which is contained in it. Furthermore if one attempts to calculate the temperature at which the equilibrium is established from the observed enrichment factor, one gets a temperature ranging around $600 \pm 100^\circ\text{C}$, which is quite a reasonable one and consistent with the geological data.

**Sulle frequenze di vibrazione delle molecole biatomiche
formate con atomi del 4°, 5°, 6°, 7° gruppo.**

G. LOVERA

Istituto di Fisica dell'Università - Modena

(ricevuto il 14 maggio 1952)

La formula, dedotta in una nota precedente ⁽¹⁾

$$(1) \quad \tilde{\nu} = 1979.7 \sqrt{\frac{K'}{r_e^3 \mu}} \text{ cm}^{-1} \quad (r_e \text{ in } \text{\AA}; \mu \text{ in u.m.a.}),$$

che fornisce i numeri d'onde $\tilde{\nu}$ delle vibrazioni molecolari, è stata applicata alle molecole biatomiche formate con atomi del 4°, 5°, 6°, 7° gruppo del sistema periodico. I valori di K' , già riportati in parte nella suddetta nota, sono i seguenti:

n	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$K' =$	2.146 ₁	2.594 ₃	2.985 ₃	3.345 ₅	3.670 ₅	3.977 ₂
$n =$	4	4.5	5	5.5	6	
$K' =$	4.255 ₉	5.431 ₂	4.781 ₇	5.033 ₀	5.270 ₀	

A differenza dal caso, trattato nella precedente nota, dei metalli alcalini, per i quali si è posto $n = 1$, nei calcoli presenti, invece, per le molecole biatomiche i cui due atomi appartengono, nel sistema periodico, allo stesso periodo, si è preso per n il numero d'ordine del periodo stesso; nei casi, invece, in cui i due atomi fanno parte di periodi diversi, si è posto n uguale alla media dei numeri d'ordine di questi due periodi. A r si è dato il valore 2 per le molecole formate con atomi del 4°, 5°, 6° gruppo, ed il valore 1,6 per le molecole aventi uno od entrambi gli atomi appartenenti al 7° gruppo.

Nelle tabelle I e II sono posti a confronto i numeri d'onde $\tilde{\nu}$ sperimentali con quelli calcolati mediante la (1) nelle condizioni ora precisate. I dati sperimentali di r_e e di $\tilde{\nu}$ sono tratti dalle tabelle di HERZBERG ⁽²⁾, tranne i valori contrassegnati con (G), che sono dovuti a GUGGENHEIMER ⁽³⁾.

⁽¹⁾ G. LOVERA: *Nuovo Cimento*, **9**, 442 (1952).

⁽²⁾ G. HERZBERG: *Molecular spectra and molecular structure - I: Spectra of diatomic molecules* (New York, 1950).

⁽³⁾ K. M. GUGGENHEIMER: *Proc. Phys. Soc.*, **58**, 456 (1946).

A parte qualche scarto eccezionalmente elevato, l'accordo tra i dati sperimentali e quelli calcolati è soddisfacente, anche per le molecole formate con atomi del 4° e 6° gruppo, per le quali era già stata proposta in precedenza un'altra formula, più accurata. L'errore medio percentuale, media dei valori assoluti degli errori percentuali singoli, risulta del 4,5%.

TABELLA I.

Numeri d'onde di vibrazione delle molecole formate con atomi del 4°, 5°, 6° gruppo.

Mole- cola	<i>n</i>	<i>r_e</i> (Å)	$\tilde{\nu}$ (cm ⁻¹)		Diff. %	Mole- cola	<i>n</i>	<i>r_e</i> (Å)	$\tilde{\nu}$ (cm ⁻¹)		Diff. %
			oss.	calc.					oss.	calc.	
GRUPPO 4°											
C ₂	2	1,3117	1641,3	1858,8	+27,6						
GRUPPO 5°											
N ₂	2	1,094	2359,6	2259,1	— 4,3	Bi ₂	6	2,92(G)	172,7	178,2	+ 3,2
P ₂	3	1,894	780,4	739,2	— 5,3	NP	2,5	1,491	1337,2	1280,7	— 4,2
As ₂	4	2,19(G)	429,4	411,8	— 4,1	AsN	3	1,65(G)	1068,0	1041,9	— 2,4
Sb ₂	5	2,57(G)	269,8	269,3	— 0,2	SbBi	5,5	2,73(G)	220,0	224,5	+ 2,5
GRUPPO 6°											
O ₂	2	1,2074	1580,4	1832,0	+ 15,4	SO	2,5	1,4933	1123,7	1215,3	+ 8,1
S ₂	3	1,889	725,7	730,7	+ 0,7	SeO	3	1,61(G)	907,1	1018,0	+ 12,2
Se ₂	4	2,157	391,8	407,8	+ 4,1	TeO	3,5	1,82(G)	796,0	852,9	+ 7,1
Te ₂	5	2,59	251	259,7	+ 3,5						
GRUPPI 4° e 5°											
CN	2	1,1718	2068,7	2121,2	+ 2,5	SiN	2,5	1,5718	1151,7	1202,8	+ 4,4
CP	2,5	1,5621	1239,7	1261,1	+ 1,7						
GRUPPI 4° e 6°											
CO	2	1,128	2168,2	2180,4	+ 0,6	GeTe	4,5	2,39(G)	323,4	332,3	+ 2,8
CS	2,5	1,536	1285,1	1287,7	+ 0,2	SnO	3,5	1,838	822,5	843,9	+ 2,6
CSe	3	1,735(G)	1036,0	1028,2	— 0,8	SnS	4	2,27	488,3	475,2	— 2,7
SiO	2,5	1,510	1242,0	1223,2	— 1,5	SnSe	4,5	2,37(G)	331,2	335,4	+ 1,3
SiS	3	1,929	749,5	732,9	— 2,2	SnTe	5	2,57(G)	259,5	267,9	+ 3,2
SiSe	3,5	2,14(G)	580,0	554,9	— 4,3	PbO	4	1,922	721,8	786,3	+ 8,9
SiTe	4	2,34(G)	481,2	476,3	— 1,0	PbS	4,5	2,395	428,1	431,9	+ 0,9
GeO	3	1,651	985,7	958,8	0,0	PbSe	5	2,53(G)	277,4	287,1	+ 3,5
GeS	3,5	2,06(G)	575,8	565,2	— 1,8	PbTe	5,5	2,73(G)	211,8	221,6	+ 4,6
GeSe	4	2,19(G)	406,8	406,6	— 0,0 ₅						
GRUPPI 5° e 6°											
NO	2	1,1508	1904,0	2027,6	+ 6,5	PO	2,5	1,4488	1230,6	1278,5	+ 3,5
NS	2,5	1,50(G)	1220,0	1263,1	+ 3,5	AsO	3	1,61(G)	967,4	1022,6	+ 5,7

TABELLA II.

Numeri d'onde di vibrazione delle molecole contenenti atomi del 7° gruppo.

Mole- cola	<i>n</i>	<i>r_e</i> (Å)	$\tilde{\nu}$ (cm ⁻¹)		Diff. %	Mole- cola	<i>n</i>	<i>r_e</i> (Å)	$\tilde{\nu}$ (cm ⁻¹)		Diff. %
			oss.	calc.					oss.	calc.	
GRUPPO 7°											
F ₂	2	1,435	892,1	1032,8	+15,7	BrF	3	1,7555	671	665,8	0,8
Cl ₂	3	1,998	564,9	513,8	9,0	BrCl	3,5	2,14(G)	430	407,1	5,3
Br ₂	4	2,2836	323,2	299,6	7,3	ICl	4	2,3207	384,2	353,0	8,1
I ₂	5	2,6666	214,6	199,7	6,9	IBr	4,5	2,48(G)	268,4	247,5	7,8
ClF	2,5	1,6281	793,2	794,7	0,2						
GRUPPI 7° e 4°											
CCl	2,5	1,73(G)	846	851,8	0,7	SnF	3,5	1,82(G)	582,9	635,6	9,0
SiF	2,5	1,603	856,7	848,5	1,0	SnCl	4	2,32(G)	352,5	355,7	0,9
SiCl	3	2,00(G)	535,4	544,1	1,6	SnBr	4,5	2,44(G)	247,7	255,9	3,3
SiBr	3,5	2,15(G)	425,4	439,6	3,3	PbF	4	2,01(G)	507,2	549,6	8,4
GeCl	3,5	2,08(G)	407,6	432,3	6,1	PbCl	04,5	2,43(G)	303,8	325,3	7,1
GeBr	4	2,29(G)	296,6	305,7	3,1	PbBr	5	2,60(G)	207,5	218,5	5,3
GRUPPI 7° e 5°											
NBr	3	1,91(G)	693	665,9	3,9	BiBr	5	2,63(G)	209,3	214,5	2,5
SbF	3,5	1,82(G)	614,2	634,5	3,3	BiI	5,5	2,79(G)	163,9	171,6	4,7
BiCl	4,5	2,48(G)	308,0	315,4	2,4						

Un accordo migliore con i dati sperimentali si potrebbe ottenere scegliendo, per ogni gruppo di molecole, un opportuno valore di *v*, il che non appare ingiustificato, dato il significato fisico attribuito a *v* nella deduzione della formula (1).

On a question of nuclear spectroscopy.

A. GAMBA and M. VERDE

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 16 Maggio 1952)

After the success of the central model in the study of nuclei, some questions have arisen as to the numbering of the states corresponding to given configurations.

One may ask, for instance, which are the multiplicities of the allowed values of the spin and isotopic spin corresponding to a given symmetry class (Wigner's super-multiplet) for an n -nucleon system. This problem has been solved by a general formula of RACAH ⁽¹⁾.

Another question comes in, when considering the multiplicities N_j of the angular momenta J associated to a given term of n equivalent nucleons. No general formula has been given so far for this problem. In atomic spectroscopy both the group theoretical and the SLATER ⁽²⁾ method are used. They, however, require that each case be considered apart. Recently extensive tables have been published by JAHN ⁽³⁾ and FLOWERS ⁽⁴⁾ for p, d, f equivalent nucleons, and, in the case of $j-j$ coupling, for $j = 3/2, 5/2, 7/2$, by using a recurrent procedure developed by JAHN ⁽³⁾.

A complete solution of the problem for $j=1$ may already be found in a formula due to RACAH (ref. ⁽¹⁾, formula (20)), who, however, has not given the physical interpretation of his relation. The method of RACAH, which actually consists in solving a difference equation, becomes quite impractical for $j > 1$.

In this letter we give some general formulae, which solve the problem for $n = 3, 4$ and arbitrary j . These formulae are of interest because one has often to deal with nuclei with few equivalent nucleons of high angular momenta outside a closed shell. The formulae are valid both in the case of orbital momenta $((l)^n$ states, $L-S$ coupling) and in the case, more significant for nuclei, of total angular momenta $((j)^n$ states, $j-j$ coupling).

The procedure is essentially the group theoretical one, as outlined for the atomic case by WEYL ⁽⁵⁾. We must write down the irreducible characteristic X of the unitary group associated to the partition $\{f_1 f_2 f_3 \dots\}$, where $f_1, f_2, f_3 \dots$ are the

⁽¹⁾ G. RACAH: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 494 (1949).

⁽²⁾ J. C. SLATER: *Phys. Rev.*, **35**, 1109 (1931).

⁽³⁾ H. A. JAHN: *Proc. Roy. Soc., A*, **201**, 516 (1950); **205**, 192 (1951).

⁽⁴⁾ B. H. FLOWERS: *Proc. Roy. Soc., A*, **210**, 497 (1952); **212**, 248 (1952).

⁽⁵⁾ H. WEYL: *The theory of groups and quantum mechanics* (Methuen, 1931), p. 371.

numbers of squares in each row of the corresponding Young pattern. One has:

$$X = \sum \frac{\chi_{f_1 f_2 f_3 \dots} (i_1 i_2 i_3 \dots)}{1^{i_1} 2^{i_2} 3^{i_3} \dots i_1! i_2! i_3! \dots} \left(\frac{\varepsilon^{j+1} - \varepsilon^{-j}}{\varepsilon - 1} \right)^{i_1} \left(\frac{\varepsilon^{2(j+1)} - \varepsilon^{-2j}}{\varepsilon^2 - 1} \right)^{i_2} \left(\frac{\varepsilon^{3(j+1)} - \varepsilon^{-3j}}{\varepsilon^3 - 1} \right)^{i_3} \dots$$

where $\chi_{f_1 f_2 f_3 \dots} (i_1 i_2 i_3 \dots)$ is the character of the irreducible representation of the symmetric permutation group associated with the same Young pattern for the class formed by all the permutations with i_1 first-order cycles, i_2 second order cycles, etc., and the sum is meant over all such classes.

The numbers N_j are then the coefficients in the development:

$$X(\varepsilon) = \sum_j N_j \frac{\varepsilon^{j+1} - \varepsilon^{-j}}{\varepsilon - 1}.$$

For the particular cases $n = 3, 4$ the following formulae are easily established:

$$\underline{n = 3}; \quad A = 3j - J$$

$$3!N_J = \begin{cases} \chi(3)\{A+1\} + 3\chi(11) \frac{1 + (-1)^A}{2} + 2\chi(001) \left\{ \left[\frac{A+3}{2} \right] - 2 \left[\frac{A+2}{3} \right] + \left[\frac{A+1}{3} \right] \right\} & \text{for } 3j \geq J \geq j, \\ \chi(3)\{2J+1\} + 3\chi(11)(-1)^{j-J} \frac{1 + (-1)^{2j}}{2} + \\ + 2\chi(001) \left\{ \left[\frac{A+3}{3} \right] - 2 \left[\frac{A+2}{3} \right] + \left[\frac{A+1}{3} \right] \right\} & \text{for } j \geq J \geq 0, \end{cases}$$

$$\underline{n = 4}; \quad B = 4j - J; \quad C = 2j - J$$

$$4!N_J = \begin{cases} \chi(4) \frac{B^2 + 3B + 2}{2} + 6\chi(21) \left[\frac{B+2}{2} \right] + 3\chi(02)(-1)^B \left[\frac{B+2}{2} \right] + \\ + 8\chi(101) \left\{ \left[\frac{B+3}{3} \right] - \left[\frac{B+2}{3} \right] \right\} + 6\chi(0001) \left\{ \left[\frac{B+4}{4} \right] - 2 \left[\frac{B+3}{4} \right] + \left[\frac{B+2}{4} \right] \right\} & \text{for } 4j \geq J \geq 2j, \\ \chi(4) \frac{8jJ + 4j - 3J^2 + J + 2}{2} + 6\chi(21) \left\{ j + (-1)^0(1 + [j] - j) - \left[\frac{C}{2} \right] \right\} + \\ + 3\chi(02)(-1)^B \left[\frac{B+2}{2} \right] + 8\chi(101) \left\{ \left[\frac{B+3}{3} \right] - \left[\frac{B+2}{3} \right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{C+2}{3} \right] + \left[\frac{C+1}{3} \right] \right\} + 6\chi(0001) \left\{ \left[\frac{B+4}{4} \right] - 2 \left[\frac{B+3}{4} \right] + \left[\frac{B+2}{4} \right] \right\} & \text{for } 2j \geq J \geq 0, \end{cases}$$

where $[x]$ means the greatest integer contained in x for $x > 0$, and $[x] = 0$ for $x < 0$.

The extension of these formulae to cases with $n > 4$ is straightforward in principle, although the calculations become rather tedious. We have not succeeded in giving a formula valid for arbitrary n .

For the reader's convenience we give the tables of characters of the symmetric permutation group for $n = 3, 4$. For $n > 4$ extensive tables may be found in the literature ⁽⁶⁾.

$\begin{matrix} \{f_1 f_2 f_3\} \\ i_1 i_2 i_3 \end{matrix}$	$\{3\}$	$\{21\}$	$\{111\}$
3	1	2	1
11	1	0	-1
001	1	-1	1

$\begin{matrix} \{f_1 f_2 f_3 f_4\} \\ i_1 i_2 i_3 i_4 \end{matrix}$	$\{4\}$	$\{31\}$	$\{22\}$	$\{211\}$	$\{1111\}$
4	1	3	2	3	1
21	1	1	0	-1	-1
02	1	-1	2	-1	1
101	1	0	-1	0	1
0001	1	-1	0	1	-1

⁽⁶⁾ F. D. MURNAGHAN: *The theory of group representation* (Baltimore, 1938).

LÖSCH-SCHOBLIK - *Die Fakultät und verwandte Funktionen*. Teubner, Leipzig, 1951, pagg. 205.

Quest'opera, come dichiara l'Autore, F. LÖSCH, che l'ha compiuta sulla base di un manoscritto lasciato da F. SCHOB-LIK, «vuol essere un'introduzione alla teoria della *funzione fattoriale* (funzione Gamma) e connesse, la quale accanto agli interessi del matematico tenga conto anche di quelli del fisico e dell'ingegnere».

Questa doppia finalità è tenuta effettivamente sempre presente, anche nei capitoli essenzialmente teorici, cosicchè di ogni nuova espressione viene posto in rilievo l'aspetto applicativo. Che ciò non vada a detrimento della completezza e del rigore scientifico, e lasci nello stesso tempo del tutto unitario e coerente lo svolgimento, è certo uno dei principali pregi del lavoro.

Non è inutile avvertire che questo libro non vuol sostituire alcun manuale di calcolo numerico: per quanto riguarda quest'ultimo, invero, l'A. rimanda alle note tavole di Jahnke-Emde, uniformando a tale scopo le proprie notazioni con quelle ivi usate.

Nel primo capitolo, dei tre che costituiscono l'Opera, vengono considerate le varie rappresentazioni della funzione fattoriale Γ (come prodotto infinito, come serie, come integrale) nonchè questioni

di calcolo differenziale, integrale e funzionale che con la Γ si connettono.

Nel secondo viene considerata la cosiddetta funzione fattoriale incompleta, che si può ottenere dall'integrale di Eu-

lero di seconda specie $z! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt$ con la decomposizione di Schlömilch

$$z! = \int_0^z e^{-t} t^z dt + \int_z^{\infty} e^{-t} t^z dt.$$

Gli integrali a secondo membro vengono studiati sia come funzioni di q (per un dato z) che come funzioni di z (per un dato q). In particolare il primo dei due modi porta a considerare, per determinati valori di z , importanti funzioni come le integral-esponenziali (integral-seno e integralcoseno), la funzione degli errori, e infine i polinomi di Hermite.

Il terzo capitolo è dedicato alle applicazioni: l'A. tocca campi svariatiissimi, dalla propagazione del calore alla sistemazione dei posti a sedere nei teatri, dai vari tipi di radiazioni alle rendite.

Questo cenno agli argomenti dell'ultima parte del libro ci induce a segnalare, anche per le precedenti, la ricchezza di contenuto, che la concisione dell'A. è riuscita a condensare in modesta mole.

DARIO FÜRST

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA
